数论函数和数列的性质研究

马金萍 著



科学出版社

(O-4549.0101)

数论函数和数列的性质研究

www.sciencep.com



ISBN 978-7-03-032925-7

高等教育出版中心
电　话：010-64000105
E-mail：ggongke@mail.sciencep.com

定 价：33.00 元

数论函数和数列的性质研究

马金萍 著

本书得到西安财经学院学术著作项目的资助

科学出版社

北 京

内 容 简 介

在数论的研究领域内，对数论函数和数列各方面、各角度的研究至关重要．本书介绍了基于数论函数和数列几个方面的研究，包括源于 Smarandache 教授提出的一些函数和常见函数的均值估计、包含数论函数的方程及求解、常见函数的计算式、新提出的素数函数和互素函数的应用、著名的 Chebyshev 多项式和 Fibonacci 数、Lucas 数、Bernoulli 数及 Euler 数的常见研究方法及成果等．书中使用的方法涉及初等方法和解析方法，而用基础的数学方法巧妙地得到一些结论，也是数论研究问题技巧性与趣味性的体现．本书是作者近几年来研究工作的一个阶段性总结，其中包括了作者的研究成果．

本书可供高等院校数学系、数论爱好者学习，也可供数论和密码学相关专业人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

数论函数和数列的性质研究/马金萍著；—北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-032925-7

I. ①数… II. ①马… III. ①数列-研究 IV. ①O171

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 249007 号

责任编辑：胡云志 房 阳／责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2012 年 1 月第一次印刷 印张：10 1/2
字数：250 000

定价：33.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

数论是数学的一个分支, 是一门研究整数性质的学科, 具有理论性和趣味性. 对数论问题的不断研究促进了数论及现代数学的长足发展.

美籍罗马尼亚著名数论专家 F.Smarandache 教授提出了许多关于特殊数列、算术函数的问题与猜想, 从而吸引了许多学者进行研究, 并取得了丰硕的成果. 同时也产生了很多新的问题, 需运用创新方法进行解决. 于是推动了数论函数和数列的科学研究.

本书正是根据作者近年来对该学科的认识和研究成果, 在导师张文鹏教授的建议下, 将目前中国学者和作者关于一些问题的部分研究成果汇编成册, 主要目的在于向读者全面系统地介绍一些数论函数和数列的性质研究现状及最新的研究成果. 书中内容主要包括 Smarandache 函数及相关函数的均值性质研究、可乘数论函数的均值性质研究; 包含数论函数和数列的方程及求解; 与常见函数相关的恒等式和不等式; 素数函数和互素函数的应用; 著名的 Chebyshev 多项式和 Fibonacci 数、Lucas 数、Bernoulli 数及 Euler 数等的研究方法及成果. 研究方法主要为初等数论方法和解析数论方法, 其中运用初等数学技巧也是数论问题趣味性的体现. 另外, 本书是作者近几年来研究工作的一个阶段性总结, 也包括作者的研究成果. 希望本书可以为数论研究者提供借鉴, 也使初学者能够初步掌握运用数论方法解决实际问题的能力.

本书的内容以作者自己近几年的研究成果为主线, 并借鉴了同仁们的一些研究方法和成果, 在此对所涉及研究成果的同仁们表示衷心的感谢; 同时对导师张文鹏教授的建议和悉心指导表示衷心的感谢; 感谢西安财经学院统计学院王佐仁院长等领导和各位同仁对本书出版工作的全力支持; 感谢我的朋友西安工程大学朱敏慧老师、西安建筑科技大学田清老师和咸阳师范学院李占虎老师为本书的编写付出的辛苦工作.

感谢西安财经学院统计学院对本书出版工作的大力支持. 本书的写作和出版得到西安财经学院 2010 年学术著作出版基金项目的资助, 以及西安统计研究院 2011 年项目的资助.

限于作者水平, 书中疏漏之处在所难免, 欢迎读者批评指正.

作　者

2010 年 12 月

常见符号说明

$d(n)$	Dirichlet 除数函数
γ	Euler 常数
$\zeta(s)$	Riemann zeta 函数
$\varphi(n)$	Euler 函数
$\sum\limits_{p}$	对所有素数求和
$\prod\limits_{p}$	对所有素数求积
$\sum\limits_{k=1}^{n}{}'$	与 n 互素的 k 求和
$\Lambda(n)$	Mangololt 函数
$[x]$	不超过 x 的最大整数
$p^{\alpha}\|m$	$p^{\alpha}\mid m$ 但 $p^{\alpha+1}\nmid m$
$\Omega(n)$	n 的素因子的个数
$[x_1, x_2, \cdots, x_n]$	$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的最小公倍数
$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的最大公约数
$\mu(n)$	Möbius 函数
$\left(\dfrac{a}{p}\right)$	Legendre 符号

目　　录

第 1 章　数论函数的均值估计

自变量 n 在某个整数集合中取值, 因变量 y 取复数值的函数 $y=f(n)$ 称为数论函数或算术函数. 数论函数在数论问题和其他相关学科的研究中有着非常重要的作用, 因此研究数论函数的性质具有重要意义. 本章主要介绍一些数论函数及与其他函数的混合均值性质.

1.1　k 次方根的整数部分序列的均值

对任意的正整数 n, 函数 $a(n)$ 定义为 n 的 k 次方根的整数部分, 即 $a(n)=[n^{\frac{1}{k}}]$. 例如, $a(1)=1$, $a(2)=1$, $a(3)=1$, $\cdots$, $a(2^k)=2$, $a(2^k+1)=2$, $\cdots$, $a(3^k)=3$, $\cdots$. Smarandache 教授 (参阅文献 [1]) 建议研究序列 $a(n)$ 的性质. 下面利用初等方法来研究它的一些均值性质. 主要包括它与 Euler 函数、除数幂和函数、多项式函数的混合均值性质.

首先介绍两个函数的定义.

定义 1.1.1　Euler 函数 $\varphi(n)$ 为不超过 n 的且与 n 互素的正整数的个数, 即

$$\varphi(n)=\sum_{k=1}^{n}{}'1.$$

特别地, 当 $n=p$, p 为素数时, $\varphi(p)=p-1$.

定义 1.1.2　除数幂和函数 $\sigma_\alpha(n)$ 为对 n 的所有因子的 α 次幂求和, 即

$$\sigma_\alpha(n)=\sum_{d|n}d^\alpha.$$

特别地, 当 $\alpha=0$ 时, 就是 Dirichlet 除数函数 $d(n)$, 即

$$d(n)=\sum_{d|n}1.$$

k 次方根的整数部分序列和 Euler 函数 $\varphi(n)$ 所形成的混合函数具有很好的均值性质, 在此有关于这两个函数的混合函数的有趣的渐近公式.

定理 1.1.1　对任意的实数 $x>1$ 和任意的正整数 $k>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(a(n))}{a(n)}=\frac{6}{\pi^2}x+O(x^{1-\frac{1}{k}-\varepsilon}),$$

其中 ε 是任意的实数.

证明　对任意的实数 $x>1$，必然存在一正整数 M 满足 $M^k \leqslant x < (M+1)^k$，由 $a(n)$ 的定义

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(a(n))}{a(n)} &= \sum_{t=1}^{M}\sum_{(t-1)^k\leqslant n<t^k}\frac{\varphi(a(n))}{a(n)}+\sum_{M^k\leqslant n<x}\frac{\varphi(a(n))}{a(n)}\\ &= \sum_{t=1}^{M-1}\sum_{t^k\leqslant n<(t+1)^k}\frac{\varphi(a(n))}{a(n)}+\sum_{M^k\leqslant n<x}\frac{\varphi(M)}{M}\\ &= \sum_{t=1}^{M-1}[(t+1)^k-t^k]\frac{\varphi(t)}{t}+O\left(\sum_{M^k\leqslant n<(M+1)^k}\frac{\varphi(M)}{M}\right)\\ &= k\sum_{t=1}^{M}t^{k-1}\frac{\varphi(t)}{t}+O(M^{k-1-\varepsilon}),\end{aligned}$$

在这里应用了估计 $\dfrac{\varphi(n)}{n}\ll n^{-\varepsilon}$.

注意到 (参阅文献 [2])

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{6}{\pi^2}x+O\left((\ln x)^{\frac{2}{3}}(\ln\ln x)^{\frac{4}{3}}\right),$$

令 $B(y)=\sum\limits_{t\leqslant y}\dfrac{\varphi(t)}{t}$, 则由 Abel 恒等式 (参阅文献 [3]), 容易推出

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{M}t^{k-1}\frac{\varphi(t)}{t} &= M^{k-1}B(M)-B(1)-(k-1)\int_1^M y^{k-2}B(y)\mathrm{d}y\\ &= M^{k-1}\left(\frac{6}{\pi^2}M+O\left((\ln M)^{\frac{2}{3}}(\ln\ln M)^{\frac{4}{3}}\right)\right)\\ &\quad -(k-1)\int_1^M y^{k-2}\left(\frac{6}{\pi^2}y+O\left((\ln y)^{\frac{2}{3}}(\ln\ln y)^{\frac{4}{3}}\right)\right)\mathrm{d}y\\ &= \frac{6}{k\pi^2}M^k+O\left((\ln M)^{\frac{2}{3}}(\ln\ln M)^{\frac{4}{3}}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(a(n))}{a(n)}=\frac{6}{\pi^2}M^k+O(M^{k-1-\varepsilon}).$$

另一方面, 注意到估计式

$$0\leqslant x-M^k<(M+1)^k-M^k\ll x^{\frac{k-1}{k}},$$

这样, 就得到了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(a(n))}{a(n)}=\frac{6}{\pi^2}x+O(x^{1-\frac{1}{k}-\varepsilon}).$$

于是完成了定理 1.1.1 的证明.

定理 1.1.2 对任意的实数 $x>1$ 和任意的正整数 k, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\varphi(a(n))}=\frac{k\zeta(2)\zeta(3)}{(k-1)\zeta(6)}x^{1-\frac{1}{k}}+A+O\left(x^{1-\frac{2}{k}}\ln x\right),$$

其中

$$A=\gamma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{n\varphi(n)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^2(n)\ln n}{n\varphi(n)}.$$

证明 注意到 (参阅文献 [4])

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\varphi(n)}=\frac{k\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\ln x+A+O\left(\frac{\ln x}{x}\right),$$

其中

$$A=\gamma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{n\varphi(n)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^2(n)\ln n}{n\varphi(n)}.$$

同定理 1.1.1 的证明, 可完成定理 1.1.2 的证明.

k 次方根的整数部分序列与除数幂和函数所形成的混合函数 $\sigma_\alpha(a(n))$ 在 α 的不同情形下, 也有一系列的均值性质, 其求解过程和结果如下:

引理 1.1.1 设 $\alpha>0$ 是一实数, 则对 $x>1$, 有

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+O(x^\beta)$$

和

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_{-\alpha}(n)=\begin{cases}\zeta(\alpha+1)x+O(x^\delta), & \alpha\neq 1,\\ \zeta(2)x+O(\ln x), & \alpha=1,\end{cases}$$

其中 $\beta=\max\{1,\alpha\}$, $\delta=\max\{0,1-\alpha\}$.

证明 参阅文献 [2].

引理 1.1.2 设 n 是一正整数, 有

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_0(a(n))=\sum_{n\leqslant x}d\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)=\frac{x}{k}\ln x+O(x).$$

证明　参阅文献 [5].

定理 1.1.3　对任意的实数 $x>1$ 和正整数 $n\geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(a(n))=\begin{cases}\dfrac{k\zeta(\alpha+1)}{\alpha+k}x^{\frac{\alpha+k}{k}}+O\left(x^{\frac{\beta+k-1}{k}}\right), & \alpha>0,\\ \dfrac{1}{k}x\ln x+O(x), & \alpha=0,\\ \zeta(2)x+O\left(x^{\frac{k+\varepsilon-1}{k}}\right), & \alpha=-1,\\ \zeta(1-\alpha)x+O\left(x^{\frac{\delta+k-1}{k}}\right), & \alpha<0,\alpha\neq-1,\end{cases}$$

$\beta=\max\{1,\alpha\}$, $\delta=\max\{0,1+\alpha\}$, ε 是任意的实数.

证明　分三种情况来讨论.

(1) 当 $\alpha>0$ 时, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(a(n))&=\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)\\&=\sum_{1^k\leqslant n<2^k}\sigma_\alpha\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)+\sum_{2^k\leqslant n<3^k}\sigma_\alpha\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)+\cdots\\&\quad+\sum_{N^k\leqslant n<(N+1)^k}\sigma_\alpha\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)+O(N^\beta)\\&=\sum_{j\leqslant N}\left((j+1)^k-j^k\right)\sigma_\alpha(j)+O(N^\beta).\end{aligned}$$

令 $A(n)=\sum\limits_{j\leqslant N}\sigma_\alpha(j)$ 和 $f(j)=\sum\limits_{j\leqslant N}\left((j+1)^k-j^k\right)$, 应用 Abel 恒等式和引理 1.1.2,

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(a(n))&=A(N)f(N)-A(1)f(1)-\int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t+O(N^\beta)\\&=\frac{k\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}N^{\alpha+k}-k(k-1)\int_1^N\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+k}t^{\alpha+k+1}\mathrm{d}t\\&\quad+O(N^{\beta+k-1})\\&=\frac{k\zeta(\alpha+1)}{\alpha+k}N^{\alpha+k}+O(N^{\beta+k-1})\\&=\frac{k\zeta(\alpha+1)}{\alpha+k}x^{\frac{\alpha+k}{k}}+O\left(x^{\frac{\beta+k-1}{k}}\right).\end{aligned}$$

(2) 当 $\alpha=-1$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\sigma_{-1}(a(n))&=\sum_{n\leqslant x}\sigma_{-1}\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)\\
&=\sum_{1^k\leqslant n<2^k}\sigma_{-1}\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)+\sum_{2^k\leqslant n<3^k}\sigma_{-1}\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)+\cdots\\
&\quad+\sum_{N^k\leqslant n<(N+1)^k}\sigma_{-1}\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)+O(N^{\varepsilon})\\
&=\sum_{j\leqslant N}\left((j+1)^k-j^k\right)\sigma_{-1}(j)+O(N^{\varepsilon}).
\end{aligned}
$$

令 $A(n)=\sum\limits_{j\leqslant N}\sigma_{-1}(j)$ 和 $f(j)=\sum\limits_{j\leqslant N}\left((j+1)^k-j^k\right)$, 则

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\sigma_{-1}(a(n))&=\sum_{n\leqslant x}\sigma_{-\alpha}\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)\\
&=A(N)f(N)-A(1)f(1)-\int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t+O(N^{\varepsilon})\\
&=\zeta(2)N^k+O(N^{k+\varepsilon-1})\\
&=\zeta(2)x+O(x^{\frac{k+\varepsilon-1}{k}}),
\end{aligned}
$$

其中 ε 是任意正实数.

(3) 当 $\alpha<0$ 但 $\alpha\neq-1$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\sigma_{\alpha}(a(n))&=\sum_{n\leqslant x}\sigma_{\alpha}\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)\\
&=\sum_{1^k\leqslant n<2^k}\sigma_{\alpha}\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)+\sum_{2^k\leqslant n<3^k}\sigma_{\alpha}\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)+\cdots\\
&\quad+\sum_{N^k\leqslant n<(N+1)^k}\sigma_{\alpha}\left([n^{\frac{1}{k}}]\right)+O(N^{\delta})\\
&=\sum_{j\leqslant N}\left((j+1)^k-j^k\right)\sigma_{\alpha}(j)+O(N^{\delta}).
\end{aligned}
$$

令 $A(n)=\sum\limits_{j\leqslant N}\sigma_{\alpha}(j)$ 和 $f(j)=\sum\limits_{j\leqslant N}\left((j+1)^k-j^k\right)$, 则

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\sigma_{\alpha}(a(n))&=A(N)f(N)-A(1)f(1)-\int_1^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t+O(N^{\delta})\\
&=k\zeta(1-\alpha)N^k-(k-1)\zeta(1-\alpha)N^k+O(N^{\delta+k-1})\\
&=\zeta(1-\alpha)N^k+O\left(N^{\delta+k-1}\right)\\
&=\zeta(1-\alpha)x+O\left(x^{\frac{\delta+k-1}{k}}\right).
\end{aligned}
$$

结合以上结论, 有

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(a(n))=\begin{cases}\dfrac{k\zeta(\alpha+1)}{\alpha+k}x^{\frac{\alpha+k}{k}}+O\left(x^{\frac{\beta+k-1}{k}}\right), & \alpha>0,\\ \dfrac{1}{k}x\ln x+O(x), & \alpha=0,\\ \zeta(2)x+O\left(x^{\frac{k+\varepsilon-1}{k}}\right), & \alpha=-1,\\ \zeta(1-\alpha)x+O\left(x^{\frac{\delta+k-1}{k}}\right), & \alpha<0,\alpha\neq-1.\end{cases}$$

于是完成了定理 1.1.3 的证明.

引理 1.1.3　设 $0<\alpha\leqslant 1$ 是一实数, $f(x)$ 是一整系数多项式, 则对任意的实数 $x>1$, 有

$$\sum_{n\leqslant x,f(n)\neq 0}\sigma_{-\alpha}(f(a(n)))=C_f(\alpha)x+O(x^{1-\alpha}\ln^\gamma x),$$

其中 γ 是一常数,

$$C_f(\alpha)=\sum_{d=1}^{\infty}P_f(d)d^{-1-\alpha},\quad P_f(d)=\sum_{\substack{f(n)\equiv 0(\bmod d),\\ 0<n\leqslant d}}1.$$

证明　参阅文献 [6].

引理 1.1.4　设 M 是一固定的正整数,$f(x)$ 是一整系数多项式, 有

$$\sum_{t=1}^{M}t^{k-1}\sigma_{-\alpha}(f(t))=\frac{C_f(\alpha)}{k}M^k+O(M^{k-\alpha}\ln^\gamma M).$$

证明　令

$$A(y)=\sum_{t\leqslant y}\sigma_{-\alpha}(f(t)).$$

由 Abel 恒等式, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{t=1}^{M}t^{k-1}\sigma_{-\alpha}(f(t))\\ =&M^{k-1}A(M)-A(1)-(k-1)\int_1^M y^{k-2}A(y)\mathrm{d}y\\ =&M^{k-1}(C_f(\alpha)M+O(M^{1-\alpha}\ln^\gamma M))\\ &-(k-1)\int_1^M y^{k-2}(C_f(\alpha)y+O(y^{1-\alpha}\ln^\gamma y))\mathrm{d}y\\ =&C_f(\alpha)M^k+O(M^{k-\alpha}\ln^\gamma M)-\frac{C_f(\alpha)(k-1)}{k}M^k+O(M^{k-\alpha}\ln^\gamma M)\\ =&\frac{C_f(\alpha)}{k}M^k+O(M^{k-\alpha}\ln^\gamma M).\end{aligned}$$

于是完成了引理 1.1.4 的证明.

定理 1.1.4 设 $0<\alpha\leqslant 1$ 是一实数, $f(x)$ 是一整系数多项式, 则对任意的实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{m\leqslant x}\sigma_{-\alpha}(f(a(m)))=C_f(\alpha)x+O\left(x^{1-\frac{\alpha}{k}+\varepsilon}\right),$$

其中

$$\sigma_{-\alpha}(n)=\sum_{l|n}\frac{1}{l^{\alpha}},$$

ε 是任意的正数.

证明 对任意的实数 $x\geqslant 1$, 必存在一正整数 M 使得

$$M^k\leqslant x<(M+1)^k.$$

令 a_0 表示 $f(x)$ 的常数项, 由 $a(m)$ 的定义和引理 1.1.4, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\leqslant x}\sigma_{-\alpha}(f(a(m)))\\
=&\sum_{t=1}^{M}\sum_{(t-1)^k\leqslant m<t^k}\sigma_{-\alpha}(f(a(m)))+\sum_{M^k\leqslant m\leqslant x}\sigma_{-\alpha}(f(a(m)))\\
=&\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{t^k\leqslant m<(t+1)^k}\sigma_{-\alpha}(f(t))+\sigma_{-\alpha}(a_0)+\sum_{M^k\leqslant m\leqslant x}\sigma_{-\alpha}(f(M))\\
=&\sum_{t=1}^{M-1}\left((t+1)^k-t^k\right)\sigma_{-\alpha}(f(t))+O\left(\sum_{M^k\leqslant m\leqslant(M+1)^k}\sigma_{-\alpha}(f(M))\right)\\
=&\sum_{t=1}^{M-1}\left(\binom{k}{1}t^{k-1}+\binom{k}{2}t^{k-2}+\cdots+1\right)\sigma_{-\alpha}(f(t))\\
&+O\left(\sum_{M^k\leqslant m\leqslant(M+1)^k}\sigma_{-\alpha}(f(M))\right)\\
=&k\sum_{t=1}^{M}t^{k-1}\sigma_{-\alpha}(f(t))+O\left(M^{k-1}\sigma_{-\alpha}(f(t))\right)\\
=&C_f(\alpha)M^k+O(M^{k-\alpha+\varepsilon}),
\end{aligned}$$

在最后一步中应用了 $\sigma_{-\alpha}(n)\ll n^{\varepsilon}$.

另一方面, 注意到估计式

$$\begin{aligned}
0\leqslant x-M^k<(M+1)^k-M^k&=kM^{k-1}+\binom{k}{2}M^{k-2}+\cdots+1\\
&=M^{k-1}\left(k+\binom{k}{2}\frac{1}{M}+\cdots+\frac{1}{M^{k-1}}\right)\ll x^{\frac{k-1}{k}}.
\end{aligned}$$

结合上面的结果, 即可得渐近公式

$$\sum_{m\leqslant x}\sigma_{-\alpha}(f(a(m)))=C_f(\alpha)x+O\left(x^{1-\frac{\alpha}{k}+\varepsilon}\right).$$

于是完成了定理 1.1.4 的证明.

1.2　m 次补数序列的均值

文献 [1] 给出了 m 次方补数的定义, 即

定义 1.2.1　设 n 是一正整数, 如果 $a_m(n)$ 是最小的正整数且满足 $na_m(n)$ 是一个完全 m 次方数, 则 $a_m(n)$ 是 n 的 m 次方补数.

例如, $a_m(2)=2^{m-1}$, $a_m(3)=3^{m-1}$, $a_m(4)=2^{m-2}$, $a_m(2^m)=1$, $\cdots$.

特别地, 当 $m=2$ 时, 称 $a_2(n)$ 为平方补数. 例如, $a_2(1)=1$, $a_2(2)=2$, $a_2(3)=3$, $a_2(4)=1$, $a_2(5)=5$, $a_2(6)=6$, $\cdots$.

定义 1.2.2　设 n 是一正整数, 定义 Smarandache 函数为

$$S(n)=\min\{m:m\in\mathbf{N},n|m!\}.$$

为了方便, 用 $p(n)$ 表示 n 的最大素因数.

引理 1.2.1　如果 n 是一个无平方因子数或者 $p(n)>\sqrt{n}$, 则 $S(n)=p(n)$.

证明　(1) 当 n 是一个无平方因子数时. 设 $n=p_1p_2\cdots p_rp(n)$, 则

$$p_i|p(n)!,\quad i=1,2,3,\cdots,r,$$

所以 $n|p(n)!$, 但是 $p(n)\nmid(p(n)-1)!$, 所以 $n\nmid(p(n)-1)!$, 即 $S(n)=p(n)$.

(2) 若 $p(n)>\sqrt{n}$. 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p(n)$, 因此

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}<\sqrt{n},$$

则

$$p_i^{\alpha_i}|p(n)!,\quad i=1,2,\cdots,r.$$

从而 $n|p(n)!$, 但是 $p(n)\nmid(p(n)-1)!$, 所以 $S(n)=p(n)$.

引理 1.2.2　设 p 是一素数, 有

$$\sum_{\sqrt{x}\leqslant p\leqslant x}p=\frac{x^2}{2\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

证明　设 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数, 注意到等式 (参阅文献 [7])

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

由 Abel 恒等式, 有

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{x}\leqslant p\leqslant x} p&=\pi(x)x-\pi(\sqrt{x})\sqrt{x}-\int_{\sqrt{x}}^{x}\pi(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{x^2}{\ln x}-\frac{x^2}{2\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)\\&=\frac{x^2}{2\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).\end{aligned}$$

引理 1.2.3 设 $x\geqslant 1$ 是任意一实数, $m\geqslant 2$ 是正整数, 有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant\sqrt{n}}} S^{m-1}(n)=O\left(x^{\frac{m+1}{2}}\ln^{m-1}x\right),$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)>\sqrt{n}}} S^{m-1}(n)=\frac{x^m\zeta(m)}{m\ln x}+O\left(\frac{x^m}{\ln^2 x}\right).$$

证明 首先, 由 Euler 求和公式 (参阅文献 [3]), 很容易得到

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant\sqrt{n}}} S^{m-1}(n)&\ll\sum_{n\leqslant x}(\sqrt{n}\ln n)^{m-1}\\&=\int_1^x(\sqrt{t}\ln t)^{m-1}\mathrm{d}t+\int_1^x(t-[t])\left((\sqrt{t}\ln t)^{m-1}\right)'\mathrm{d}t\\&\quad+(\sqrt{x}\ln x)^{m-1}(x-[x])\\&=\frac{m+3}{m+1}x^{\frac{m+1}{2}}\ln^{m-1}x+O\left(x^{\frac{m}{2}}\ln^{m-1}x\right),\end{aligned}$$

这就证明了第一个估计式. 又

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)>\sqrt{n}}} S^{m-1}(n)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ p>\sqrt{np}}} S^{m-1}(np)=\sum_{\substack{n\leqslant\sqrt{x}\\ \sqrt{n}<p\leqslant\frac{x}{n}}} p^{m-1}=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{\sqrt{n}<p\leqslant\frac{x}{n}} p^{m-1}.$$

应用 Abel 恒等式, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant\frac{x}{n}} p^{m-1}\\&=\pi\left(\frac{x}{n}\right)\left(\frac{x}{n}\right)^{m-1}-\pi(\sqrt{x})(\sqrt{x})^{m-1}-\int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{n}}\pi(t)(t^{m-1})'\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{x^m}{n^m(\ln x-\ln n)}+O\left(\frac{x^m}{n^m(\ln x-\ln n)^2}\right)\right)\\&\quad-\left(\frac{2x^{\frac{m}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{4x^{\frac{m}{2}}}{\ln^2 x}\right)\right)-(m-1)\int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{n}}\left(\frac{t^{m-1}}{\ln t}+O\left(\frac{t^{m-1}}{\ln^2 x}\right)\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{x^m}{mn^m\ln x}+O\left(\frac{x^m}{n^m\ln^2 x}\right).\end{aligned}$$

由文献 [3], 当 $s>0,s\neq 1$ 时,

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}=\frac{x^{1-s}}{1-s}+\zeta(s)+O(x^{-s}).$$

因此, 有渐近式

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{\sqrt{n}<p\leqslant\frac{x}{n}}p^{m-1}=\frac{x^m\zeta(m)}{m\ln x}+O\left(\frac{x^m}{\ln^2 x}\right).$$

于是完成了引理 1.2.3 的证明.

定理 1.2.1　对任意的实数 $x\geqslant 3$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S(a_2(n))=\frac{\pi^2x^2}{12\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

证明　首先有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}S(a_2(n))&=\sum_{m^2n\leqslant x}S(n)|\mu(n)|\\&=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n\leqslant\frac{x}{m^2}}S(n)|\mu(n)|.\end{aligned}$$

对内层的和式, 由引理 1.2.1 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant\frac{x}{m^2}}S(a_2(n))|\mu(n)|&=\sum_{\substack{np\leqslant\frac{x}{m^2}\\ p\geqslant\sqrt{np}}}p|\mu(n)|+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\\&=\sum_{\substack{np\leqslant\frac{x}{m^2}\\ p\geqslant\sqrt{\frac{x}{m^2}}}}p|\mu(n)|+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\\&=\sum_{n\leqslant\sqrt{\frac{x}{m^2}}}|\mu(n)|\sum_{\sqrt{\frac{x}{m^2}}\leqslant p\leqslant\frac{x}{nm^2}}p+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\\&=\sum_{n\leqslant\ln^2 x}\frac{|\mu(n)|x^2}{2n^2m^4\ln\dfrac{x}{nm^2}}+\sum_{\ln^2 x<n\leqslant\sqrt{\frac{x}{m^2}}}\frac{|\mu(n)|x^2}{2n^2m^4\ln\dfrac{x}{nm^2}}\\&\quad+O\left(\frac{x^2}{m^4\ln^2 x}\right)\\&=\frac{\zeta(2)x^2}{2\zeta(4)m^4\ln x}+O\left(\frac{x^2}{m^4\ln^2 x}\right).\end{aligned}$$

所以, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}S(a_2(n))&=\frac{\zeta(2)x^2}{2\zeta(4)\ln x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{m^4}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{m^4}\right)\\&=\frac{\zeta(2)x^2}{2\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).\end{aligned}$$

注意到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, 因此

$$\sum_{n\leqslant x}S(a_2(n))=\frac{\pi^2x^2}{12\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

于是完成了定理 1.2.1 的证明.

定理 1.2.2 对任意的实数 $x\geqslant 1$ 和 $m\geqslant 2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}a_m(S(n))=\frac{x^m\zeta(m)}{m\ln x}+O\left(\frac{x^m}{\ln^2 x}\right).$$

证明 由引理 1.2.1, 引理 1.2.3 和 $a_m(n)$ 的定义显然有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}a_m(S(n))&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)>\sqrt{n}}}p^{m-1}+O\left(\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant\sqrt{n}}}(\sqrt{n}\ln n)^{m-1}\right)\\&=\frac{x^m\zeta(m)}{m\ln x}+O\left(\frac{x^m}{\ln^2 x}\right).\end{aligned}$$

于是完成了定理 1.2.2 的证明.

1.3 素因子最大指数序列 $e_q(n)$ 的均值

设 $q\geqslant 3$ 是一正整数, $e_q(n)$ 表示在所有整除 n 的素因子中的最大指数, 则称 $\{e_q(n)\}$ 为素因子最大指数序列. 显然当 $q^m|n$ 且 $q^{m+1}\nmid n$ 时, $e_q(n)=m$. 本节将研究关于 $e_q(n)$ 的两个均值性质.

定理 1.3.1 设 $q\geqslant 3$ 是一正整数, 则对任意的实数 $x\geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}e_q(n)=\frac{x}{q-1}+O(\ln x).$$

证明 设 $M=[x]$, 即不超过 x 的最大整数, S 表示集合 $\{1,2,3,\cdots,M\}$. 把集合 S 按如下方式分成互不相交的集合:

对每一个整数 $m\geqslant 0$, 令

$$A(m)=\{n|e_q(n)=m,1\leqslant n\leqslant M\},$$

那么, $A(m)$ 包含了 S 中满足 $q^m|m$, 但是 $q^{m+1}\nmid m$ 的元素.

如果 $f(m)$ 表示 $A(m)$ 中元素的个数, 则有

$$f(m)=\left[\frac{M}{q^m}\right]-\left[\frac{M}{q^{m+1}}\right].$$

因此

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} e_q(n) &= \sum_{n\leqslant M} e_q(n) = \sum_{m=0}^{\infty} mf(m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m\left(\left[\frac{M}{q^m}\right]-\left[\frac{M}{q^{m+1}}\right]\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{M}{q^m}\right] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{M}{q^m} + O\left(\sum_{m\leqslant\frac{\ln M}{\ln q}} 1\right) + O\left(\sum_{m>\frac{\ln M}{\ln q}}\frac{M}{q^m}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x}{q^m} + O\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{q^m}\right) + O\left(\frac{\ln M}{\ln q}\right) \\
&= \frac{x}{q-1} + O(\ln x).
\end{aligned}
$$

于是完成了定理 1.3.1 的证明.

在定理 1.3.1 中取 $q = p_1p_2$, 其中 p_1, p_2 是两个不同的素数, 立即可得到下面的推论:

推论 1.3.1　对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$
\sum_{n\leqslant x} e_{p_1p_2}(n) = \frac{x}{p_1p_2-1} + O(\ln x).
$$

定理 1.3.2　设 $q \geqslant 3$ 是一正整数, $k \geqslant 2$ 是一整数, 存在渐近公式

$$
\sum_{n\leqslant x} e_q^k(n) = \frac{q-1}{q}B_q(k)x + O(\ln^{k+1} x),
$$

其中 $B_q(k)$ 由下列递推公式给出:

$$
\begin{aligned}
B_q(0) &= \frac{1}{q-1}, \\
B_q(k) &= \frac{1}{q-1}\left(\binom{k}{1}B_q(k-1) + \binom{k}{2}B_q(k-2) + \cdots \right.\\
&\quad \left. + \binom{k}{k-1}B_q(1) + B_q(0) + 1\right).
\end{aligned}
$$

证明　考虑级数

$$
B_q(k) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^k}{q^m}.
$$

很容易证明当 $k = 0$ 时,

$$
B_q(0) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{q^m} = \frac{1}{q-1},
$$

且级数 $B_q(k)$ 满足递推式

$$B_q(k) = \frac{1}{q-1}\left(\binom{k}{1}B_q(k-1) + \binom{k}{2}B_q(k-2) + \cdots \right.$$
$$\left. + \binom{k}{k-1}B_q(1) + B_q(0) + 1\right).$$

利用与证明定理 1.3.1 同样的方法, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} e_q^k(n) &= \sum_{n\leqslant M} e_q^k(n) = \sum_{m=0}^{\infty} m^k f(m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^k \left(\left[\frac{M}{q^m}\right] - \left[\frac{M}{q^{m+1}}\right]\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^k \left(\frac{M}{q^m} - \frac{M}{q^{m+1}}\right) + O\left(\sum_{m\leqslant \frac{\ln M}{\ln q}} m^k\right) + O\left(\sum_{m>\frac{\ln M}{\ln q}} \frac{Mm^k}{q^m}\right) \\
&= \frac{(q-1)M}{q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^k}{q^m} + O(\ln^{k+1} M) + O\left(\frac{1}{q^{\left[\frac{\ln M}{\ln q}\right]}}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{M\left(\frac{\ln M}{\ln q}+u\right)^k}{q^u}\right) \\
&= \frac{(q-1)M}{q}B_q(k) + O(\ln^{k+1} M) \\
&\quad + O\left(\left(\frac{\ln M}{\ln q}\right)^k \sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{q^u} + \binom{k}{1}\left(\frac{\ln M}{\ln q}\right)^{k-1}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{u}{q^u} + \cdots + \binom{k}{k}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{u^k}{q^u}\right) \\
&= \frac{(q-1)M}{q}B_q(k) + O(\ln^{k+1} M) \\
&= \frac{q-1}{q}B_q(k)x + O(\ln^{k+1} x).
\end{aligned}$$

于是就完成了定理 1.3.2 的证明.

1.4 奇筛序列

在文献 [1] 中, 关于奇筛序列的定义是

定义 1.4.1 由奇数得到一个序列, 但奇数不等于任意两个素数的差. 例如, 7, 13, 19, 23, 25, 31, 33, 43, 49, 53, $\cdots$ 是奇筛序列.

用 $\mathcal{A}$ 表示所有奇筛数的集合. 在此利用初等和解析的方法来研究数列 $\mathcal{A}$ 的均值性质, 及在集合 $\mathcal{A}$ 中一些常见序列的均值性质.

引理 1.4.1 对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} n^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^\alpha).$$

证明 参阅文献 [3].

在引理中取 $\alpha = 0, 1$, 有下面的推论:

推论 1.4.1 对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有

$$\sum_{n \leqslant x} 1 = x + O(1)$$

和

$$\sum_{n \leqslant x} n = \frac{x^2}{2} + O(x).$$

引理 1.4.2 对任意给定的实数 x, $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数, 有

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right).$$

证明 参阅文献 [7].

引理 1.4.3 对任意给定的实数 $x \geqslant 3$, 设 p 是一素数, 有

$$\sum_{p \leqslant x} p = \frac{x^2}{2\ln x} + \frac{x^2}{4\ln^2 x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right).$$

证明 由引理 1.4.2 和 Abel 恒等式, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{p \leqslant x} p = & \pi(x)x - \int_1^x \pi(t)\mathrm{d}t \\ = & \frac{x^2}{\ln x} + \frac{x^2}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right) \\ & - \int_2^x \frac{t}{\ln t}\mathrm{d}t - \int_2^x \frac{t}{\ln^2 t}\mathrm{d}t + O\left(\int_2^x \frac{t}{\ln^3 t}\mathrm{d}t\right) \\ = & \frac{x^2}{2\ln x} + \frac{x^2}{4\ln^2 x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right).\end{aligned}$$

于是完成了引理 1.4.3 的证明.

引理 1.4.4 对任意给定的实数 $x \geqslant 1$, 有

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).$$

证明 参阅文献 [3].

引理 1.4.5 对任意给定的实数 $x \geqslant 1$, 有

$$\sum_{n \leqslant x} d(2n) = \frac{3}{2}x\ln x + \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}\right)x + O(\sqrt{x}\ln^2 x).$$

证明 设 $s=\sigma+it$ 是一复数, $h(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(2n)}{n^s}$. 注意到有估计式 $d(2n)\ll n^{\varepsilon}$, 因此当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时,$h(s)$ 是绝对收敛的. 则由 Euler 乘积公式和 $d(n)$ 的定义可得

$$\begin{aligned}
h(s)&=\prod_{p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d(2p^m)}{p^{ms}}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d(2^{m+1})}{2^{ms}}\prod_{p>2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d(2p^m)}{p^{ms}}\\
&=2\zeta^2(s)\frac{\left(\prod\limits_{p>2}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{d(p^m)}{p^{ms}}\right)\left(\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{d(2^{m+1})}{2^{ms}}\right)}{\prod\limits_{p}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{d(p^m)}{p^{ms}}}\\
&=2\zeta^2(s)\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{d(2^{m+1})}{2^{ms}}}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{d(2^m)}{2^{ms}}}\\
&=\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right),
\end{aligned}$$

在 Perron 公式 (参阅文献 [8]) 中, 取 $b=1+\varepsilon,T\geqslant 1$, $x\geqslant 1$, 则

$$\sum_{n\leqslant x}d(2n)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}h(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left|\frac{x^b}{T}\right|+O\left(\frac{xH(2x)\ln x}{T}\right).$$

把积分限移到 $a=\frac{1}{2}+\varepsilon$, 这样函数

$$f(s)=\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right)\frac{x^s}{s}$$

在 $s=1$ 处有一个二阶极点, 则根据留数定理有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}d(2n)=&\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right)\frac{x^s}{s}\\
&+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left|\int_{b-\mathrm{i}T}^{a-\mathrm{i}T}+\int_{a-\mathrm{i}T}^{a+\mathrm{i}T}+\int_{a+\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}\right|\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\\
&+O\left|\frac{x^b}{T}\right|+O\left(\frac{xH(2x)\ln x}{T}\right),
\end{aligned}$$

其中

$$\left|\int_{b-\mathrm{i}T}^{a-\mathrm{i}T}+\int_{a+\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}\right|\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\ll\frac{x}{T},$$

$$\int_{a-\mathrm{i}T}^{a+\mathrm{i}T}\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s \ll x^{\frac{1}{2}}\ln^2 T.$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}d(2n)=&\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right)\frac{x^s}{s}+O\left|\frac{x}{T}\right|\\&+O\left(x^{\frac{1}{2}}\ln^2 T\right)+O\left|\frac{x^b}{T}\right|+O\left|\frac{xH(2x)\ln x}{T}\right|\\=&\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right)\frac{x^s}{s}+O\left|\frac{x}{T}\right|\\&+O\left(x^{\frac{1}{2}}\ln^2 T\right)+O\left|x^{1+\varepsilon}\frac{\ln x}{T}\right|.\end{aligned}$$

取 $T=\dfrac{1}{2}+\varepsilon$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}d(2n)=&\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right)\frac{x^s}{s}+O\left(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right)+O\left(x^{\frac{1}{2}}\ln^2 x\right)\\=&\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right)\frac{x^s}{s}+O\left(x^{\frac{1}{2}}\ln^2 x\right).\end{aligned}$$

可得到函数

$$f(s)=\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right)\frac{x^s}{s}$$

在 $s=1$ 处有一个二阶极点, 且函数在该点的留数为

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta^2(s)\left(2-\frac{1}{2^s}\right)\frac{x^s}{s}=\frac{3}{2}x\ln x+\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{2}\right)x.$$

这样, 可得

$$\sum_{n\leqslant x}d(2n)=\frac{3}{2}x\ln x+\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{2}\right)x+O(\sqrt{x}\ln^2 x).$$

引理 1.4.6　对任意的正实数 x, a 是任取的正整数, 有

$$\sum_{0<p-a\leqslant x}d(p-a)=\frac{315\zeta(3)}{2\pi^4}\prod_{p|a}\frac{(p-1)^2}{p^2-p+1}x+O(x\ln^{-1+\varepsilon}x),$$

其中 ε 是任意小的正数.

证明　参阅文献 [9].

有了这几个引理便可证明下面几个定理:

定理 1.4.1　对任意的实数 $x\geqslant 3$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\a\leqslant x}}a=x^2-\frac{x^2}{2\ln x}-\frac{x^2}{4\ln^2 x}+O(x).$$

证明 事实上

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\leqslant x}} a=\sum_{n\leqslant x}(2n-1)-\sum_{p\leqslant x}(p-2)$$
$$=2\sum_{n\leqslant x}n-\sum_{n\leqslant x}1-\sum_{p\leqslant x}p+2\pi(x).$$

由引理 1.4.1 ~ 引理 1.4.3, 有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\leqslant x}} a=&2\left(\frac{x^2}{2}+O(x)\right)-(x+O(1))\\&-\left(\frac{x^2}{2\ln x}+\frac{x^2}{4\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right)\right)\\&+2\left(\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)\right)\\=&x^2-\frac{x^2}{2\ln x}-\frac{x^2}{4\ln^2 x}+O(x).\end{aligned}$$

于是完成了定理 1.4.1 的证明.

定理 1.4.2 对任意的实数 $x\geqslant 3$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\leqslant x}} d(a)=\frac{1}{2}x\ln x+Bx+O\left(x^{\frac{1}{2}}\ln^2 x\right),$$

其中 $B=4\gamma-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln 2-\frac{315\zeta(3)}{6\pi^4}$.

证明 由引理 1.4.4 ~ 引理 1.4.6, 易得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\leqslant x}} d(a)=&\sum_{n\leqslant x}d(2n-1)-\sum_{p\leqslant x}d(p-2)\\=&\sum_{n\leqslant 2x}d(n)-\sum_{n\leqslant x}d(2n)-\sum_{p\leqslant x}d(p-2)\\=&2x\ln x+2(2\gamma-1+\ln 2)x+O(\sqrt{x})\\&-\frac{3}{2}x\ln x+\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{2}\right)x+O(\sqrt{x}\ln^2 x)\\&-\frac{315\zeta(3)}{6\pi^4}x+O(x\ln^{-1+\varepsilon}x)\\=&\frac{1}{2}x\ln x+Bx+O(\sqrt{x}\ln^2 x).\end{aligned}$$

于是完成了定理 1.4.2 的证明.

定理 1.4.3　对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leqslant x}} n = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

证明　定义数论函数

$$a(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 是素数}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

并在引理 1.4.2 中取

$$\pi(x) = \sum_{n\leqslant x} a(n) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

在 Abel 恒等式中取 $f(n) = n$, 可得到估计式

$$\begin{aligned}
\sum_{p\leqslant x+2} p &= (x+2)\pi(x+2) - 2\pi(2) - \int_2^{x+2} \pi(t) f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{(x+2)^2}{\ln(x+2)} + O\left(\frac{(x+2)^2}{\ln^2(x+2)}\right) - \int_2^{x+2}\left(\frac{t}{\ln t} + O\left(\frac{t}{\ln^2 t}\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{(x+2)^2}{2\ln(x+2)} + O\left(\frac{(x+2)^2}{\ln^2(x+2)}\right).
\end{aligned}$$

所以由奇筛序列的定义和 Euler 求和公式, 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{a\in A\\ a\leqslant x}} n &= \sum_{2n-1\leqslant x} (2n-1) - \sum_{p-2\leqslant x} (p-2) \\
&= \frac{(x+1)(x+3)}{4} + O(x) - \sum_{p\leqslant x+2} p + 2\sum_{p\leqslant x+2} 1 \\
&= \frac{(x+1)(x+3)}{4} - \frac{(x+2)^2}{2\ln(x+2)} + O\left(\frac{(x+2)^2}{\ln^2(x+2)}\right) \\
&= \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).
\end{aligned}$$

于是完成了定理 1.4.3 的证明.

定理 1.4.4　对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\leqslant x}} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{2} - \ln\ln(x+2) + \frac{1}{2}\gamma - C + D + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

其中 C, D 为可计算的常数.

证明 由 Euler 求和公式可得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\ln x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right), \tag{1-1}$$

由于

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{2n(2n-1)}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2},$$

所以

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{2n(2n-1)}=O(1). \tag{1-2}$$

注意到

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+C+O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{1-3}$$

其中 C 为常数. 则由奇筛序列的定义和式 (1-1)~ 式 (1-3), 可以推出

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\leqslant x}}\frac{1}{n}&=\sum_{2n-1\leqslant x}\frac{1}{2n-1}-\sum_{p-2\leqslant x}\frac{1}{p}\\ &=\sum_{n\leqslant\frac{x+1}{2}}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n(2n-1)}\right)-\sum_{3\leqslant p\leqslant x+2}\frac{1}{p-2}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant\frac{x+1}{2}}\frac{1}{n}-\sum_{p\leqslant x+2}\frac{1}{p}+\sum_{n\leqslant\frac{x+1}{2}}\frac{1}{2n(2n-1)}-\sum_{3\leqslant p\leqslant x+2}\frac{2}{p(p-2)}+\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{2}-\ln\ln(x+2)+\frac{1}{2}\gamma-C+D+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\end{aligned}$$

其中 D 为可计算的常数. 于是完成了定理 1.4.4 的证明.

1.5 SCBF(n) 函数的均值

在文献 [1] 中, Smarandache 教授给出了如下定义:

定义 1.5.1 对于一个正整数 n, 当它的所有因子之乘积不超过它本身, 则称 n 为简单数. 例如, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, $\cdots$.

用 $\mathcal{A}$ 表示所有简单数之集合.

定义 1.5.2 函数 SCBF(n) 定义为介于正整数 n 的最大和最小素因数之间的合数之和.

例如: SCBF(14) = 10, 这是因为 14 的最小素因子为 2, 最大素因子为 7, 而在 2 和 7 之间的合数为 4 和 6 且 $4+6=10$.

Earls 研究了关于函数 SCBF(n) 的一些算术性质 (参阅文献 [10]), 证明了函数 SCBF(n) 不是可乘函数, 例如, SCBF(14×15) = 10, 但 SCBF(14) × SCBF(15) = 40. 他还证明了对于 i, j 为正整数, 则 SCBF($2^i\times 5^j$) = 4, SCBF($2^i\times 7^j$) = 10. 在本节中, 主要利用初等方法来研究函数 SCBF(n) 在集合 $\mathcal{A}$ 下的均值性质.

引理 1.5.1　对任意的素数 p 和正整数 k, 有渐近公式

$$\mathrm{SCBF}(p^k)=0.$$

证明　参阅文献 [10].

引理 1.5.2　设 $n\in\mathcal{A}$, 则有 $n=p$, $n=p^2$, $n=p^3$, $n=pq$ 这四种情况, 其中 p, q 是不同的素数.

证明　设 n 是一整数, $p_d(n)$ 是 n 的所有正因子的乘积, 即 $p_d(n)=\prod\limits_{d|n}d$. $q_d(n)$ 是 n 的所有正真因子的乘积, 即 $q_d(n)=\prod\limits_{\substack{d|n\\ d<n}}d$, 则由 $p_d(n)$ 的定义可知

$$p_d(n)=\prod_{d|n}d=\prod_{d|n}\frac{n}{d},$$

因此

$$p_d^2(n)=\prod_{d|n}d\times\prod_{d|n}\frac{n}{d}=\prod_{d|n}n=n^{d(n)},$$

$$p_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}$$

和

$$q_d(n)=\prod_{\substack{d|n\\ d<n}}=\frac{\prod\limits_{d|n}1}{n}=n^{\frac{d(n)}{2}}-1.$$

由简单数的定义, $n^{\frac{d(n)}{2}}-1\leqslant n$, 因此

$$d(n)\leqslant 4,$$

这个不等式成立当且仅当 $n=p$ 或者 $n=p^2$ 或者 $n=p^3$ 或者 $n=pq$, 于是完成了引理 1.5.2 的证明.

引理 1.5.3　对任意两个不同的素数 p 和 $q(p<q)$, 有渐近公式

$$\mathrm{SCBF}(pq)=\frac{q^2}{2}\left(1-\frac{1}{\ln q}\right)-\frac{p^2}{2}\left(1-\frac{1}{\ln p}\right)+O\left(\frac{q^2}{\ln^2 q}\right).$$

证明 由 SCBF(n) 的定义, 有

$$\mathrm{SCBF}(pq)=\sum_{p<n<q}n-\sum_{p<q_1<q}q_1,$$

其中 q_1 是素数.

利用 Abel 恒等式和渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}n^{\alpha}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+O(x^{\alpha}),$$

有

$$\begin{aligned}\mathrm{SCBF}(pq)&=\sum_{p<n<q}n-\sum_{p<q_1<q}q_1\\&=\sum_{p<n\leqslant q-1}n-\sum_{p<q_1\leqslant q-1}q_1\\&=\sum_{n\leqslant q-1}n-\sum_{n\leqslant p}n-\sum_{p<q_1\leqslant q-1}q_1\\&=\frac{(q-1)^2}{2}-\frac{(p-1)^2}{2}+O(q)-(q-1)\pi(q-1)\\&\quad+p\pi(p)+\int_p^{q-1}\pi(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{q^2}{2}-\frac{q^2}{2\ln q}-\frac{p^2}{2}+\frac{p^2}{2\ln p}+O\left(\frac{q^2}{\ln^2 q}\right)\\&=\frac{q^2}{2}\left(1-\frac{1}{\ln q}\right)-\frac{p^2}{2}\left(1-\frac{1}{\ln p}\right)+O\left(\frac{q^2}{\ln^2 q}\right).\end{aligned}$$

于是完成了引理 1.5.3 的证明.

引理 1.5.4 对任意实数 $x\geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{pq\leqslant x}\mathrm{SCBF}(pq)=C\frac{x^3}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right),$$

其中 p, q 是两个不同的素数, $C=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{p}\dfrac{1}{p^3}$ 是一常数.

证明 由 SCBF(n) 的定义和引理 1.5.1, 引理 1.5.3, 有

$$\begin{aligned}\sum_{pq\leqslant x}\mathrm{SCBF}(pq)&=2\sum_{pq\leqslant x,p<q}\mathrm{SCBF}(pq)-\sum_{p^2\leqslant x}\mathrm{SCBF}(p^2)\\&=2\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\mathrm{SCBF}(pq)\\&=\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\left(q^2-\frac{q^2}{\ln q}-p^2+\frac{p^2}{\ln p}+O\left(\frac{q^2}{\ln^2 q}\right)\right).\end{aligned}$$

注意到渐近式 $\pi(x)=\dfrac{x}{\ln x}+O\left(\dfrac{x}{\ln^2 x}\right)$, 应用 Abel 恒等式, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}} q^2 &= \pi\left(\frac{x}{p}\right)\frac{x^2}{p^2}-\pi(p)p^2-2\int_p^{\frac{x}{p}}\pi(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{x^3}{3p^3\ln\frac{x}{p}}-\frac{p^3}{3\ln p}+O\left(\frac{x^3}{p^3\ln^2\frac{x}{p}}\right)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\frac{q^2}{\ln q} &= A\left(\frac{x}{p}\right)f\left(\frac{x}{p}\right)-A(p)f(p)-\int_p^{\frac{x}{p}}A(t)f'(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{x^3}{3p^3\ln^2\frac{x}{p}}-\frac{p^3}{3\ln^2 p}-\frac{p^3}{9\ln^3 p}+O\left(\frac{x^3}{p^3\ln^3\frac{x}{p}}\right),\end{aligned}$$

其中 $A\left(\dfrac{x}{p}\right)=\displaystyle\sum_{p<q<\frac{x}{p}}q^2$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

由文献 [3] 可知

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+D+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

D 为可计算的常数,

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

和

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p^3=\frac{x^2}{2\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

应用同样的方法, 则有

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{p}{\ln p}=\frac{2x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$$

和

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{p^3}{\ln p}=\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right).$$

注意到

$$\frac{1}{1-\dfrac{\ln p}{\ln x}}=1+\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^m p}{\ln^m x}+\cdots,$$

便有以下两个渐近公式:

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}q^2&=\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3p^3\ln\frac{x}{p}}-\frac{p^3}{3\ln p}+O\left(\frac{x^3}{p^3\ln^2\frac{x}{p}}\right)\right)\\&=\frac{x^3}{3\ln x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p^3}\left(1+\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots\right)-\frac{1}{3}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{p^3}{\ln p}\\&\quad+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p^3}\left(1+2\frac{\ln p}{\ln x}+3\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots\right)\right)\\&=C\frac{x^3}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\frac{q^2}{\ln q}&=\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3p^3\ln^2\dfrac{x}{p}}-\frac{p^3}{3\ln^2 p}-\frac{p^3}{9\ln^3 p}+O\left(\frac{x^3}{p^3\ln^3\dfrac{x}{p}}\right)\right)\\&=\frac{x^3}{3\ln^2 x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p^3}\left(1+2\frac{\ln p}{\ln x}+3\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots\right)\\&\quad-\frac{1}{3}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{p^3}{\ln^2 p}-\frac{1}{9}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{p^3}{\ln^3 p}+O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{x^3}{p^3\ln^3\dfrac{x}{p}}\right)\\&=C\frac{x^3}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right),\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&2\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\mathrm{SCBF}(pq)\\=&\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\left(q^2-\frac{q^2}{\ln q}-p^2+\frac{p^2}{\ln p}+O\left(\frac{q^2}{\ln^2 q}\right)\right)\\=&\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}q^2-\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\frac{q^2}{\ln q}-\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p^2\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}1\\&+\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{p^2}{\ln p}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}1+O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\frac{q^2}{\ln^2 q}\right)\\=&C\frac{x^3}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right).\end{aligned}$$

于是完成了引理 1.5.4 的证明

定理 1.5.1 对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in \mathcal{A}}} \mathrm{SCBF}(n) = C\frac{x^3}{\ln x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $C = \frac{1}{3}\sum_{p}\frac{1}{p^3}$ 是一常数.

证明 由简单数的定义和引理 1.5.2，则

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in \mathcal{A}}} \mathrm{SCBF}(n)$$
$$= \sum_{p \leqslant x} \mathrm{SCBF}(n) + \sum_{p^2 \leqslant x} \mathrm{SCBF}(n) + \sum_{p^3 \leqslant x} \mathrm{SCBF}(n) + \sum_{pq \leqslant x} \mathrm{SCBF}(n).$$

利用引理 1.5.1 和引理 1.5.4, 便可得到

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in \mathcal{A}}} \mathrm{SCBF}(n) = \sum_{pq \leqslant x} \mathrm{SCBF}(n) = C\frac{x^3}{\ln x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right).$$

于是完成了定理 1.5.1 的证明.

1.6 数论函数 FK(n) 的均值

首先给出几个函数的定义

定义 1.6.1 对任意的正整数 n, IS(n) 为不超过 n 的最大平方数. 例如, IS(1) = 1, IS(2) = 1, IS(3) = 1, IS(4) = 2, IS(5) = 2, IS(6) = 2, $\cdots$.

现在对实数 x, 研究函数 $x - \mathrm{IS}(n)$, 即实数 x 的平方分数部分. 关于这一问题的研究是非常有意义的, 它可以帮助我们了解平方分数部分函数分布的规律性.

定义 1.6.2 对任意的正整数 n, IK(n) 表示不超过 n 的最大 k 次幂. 而 $\mathrm{FK}(n) = n - \mathrm{IK}(n)$.

本节讨论函数 FK(n) 的均值分布性质.

引理 1.6.1 对任意的实数 $x \geqslant 1$ 和 $\alpha \geqslant 0$, 有

$$\sum_{n \leqslant x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^{\alpha}).$$

证明 参阅文献 [3].

应用引理 1.6.1 可证明如下定理:

定理 1.6.1 对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{FK}(n)=\frac{k^2}{2(2k-1)}x^{\frac{2k-1}{k}}+O\left(x^{\frac{2k-2}{k}}\right).$$

证明 事实上, 对任意的实数 $x \geqslant 1$, 显然存在唯一的正整数 M, 满足不等式

$$M^k \leqslant x \leqslant (M+1)^k. \tag{1-4}$$

于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{FK}(n)&=\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{t^k\leqslant n<(t+1)^k}(n-t^k)+O\left(\sum_{M^k\leqslant n\leqslant x}(n-M^k)\right)\\&=\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{0\leqslant u<(t+1)^k-t^k}u+O\left(\sum_{0\leqslant u\leqslant x-M^k}u\right)\\&=\sum_{t=1}^{M-1}\left(\frac{k^2}{2}t^{2k-2}+O(t^{2k-3})\right)+O(M^{2k-2})\\&=\frac{k^2}{2(2k-1)}M^{2k-1}+O(M^{2k-2}).\end{aligned} \tag{1-5}$$

由式 (1-4) 可得

$$x-M^k \ll (M+1)^k-M^k \ll M^{k-1} \ll x^{\frac{k-1}{k}},$$

即有

$$M^{2k-1}=x^{\frac{2k-1}{k}}+O\left(x^{\frac{2k-2}{k}}\right) \tag{1-6}$$

和

$$M^{2k-2} \ll x^{\frac{2k-2}{k}}. \tag{1-7}$$

结合式 (1-4)~ 式 (1-7) 可得

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{FK}(n)=\frac{k^2}{2(2k-1)}x^{\frac{2k-1}{k}}+O\left(x^{\frac{2k-2}{k}}\right).$$

于是完成了定理 1.6.1 的证明.

显然, 在定理中分别取 $k=2,3,4$, 不难有以下几个推论:

推论 1.6.1 对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(n-\mathrm{IS}(n))=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+O(x).$$

推论 1.6.2 设 IC(n) 表示不超过 n 的最大立方数, 则对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x}(n - \mathrm{IC}(n)) = \frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} + O\left(x^{\frac{4}{3}}\right).$$

推论 1.6.3 设 IF(n) 表示不超过 n 的最大四次方数, 则对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x}(n - \mathrm{IF}(n)) = \frac{8}{7}x^{\frac{7}{4}} + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right).$$

1.7 Smarandache 双阶乘函数及其加法类似函数的均值

Smarandache 双阶乘函数及其类似函数的定义如下:

定义 1.7.1 对任意的正整数 n, Smarandache 双阶乘函数 Sd$f(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n|m!!$, 其中

$$m!! = \begin{cases} 2\cdot 4\cdots m, & 2|m, \\ 1\cdot 3\cdots m, & 2\nmid m. \end{cases}$$

在文献 [11] 中, Sandor 教授定义了 Smarandache 双阶乘函数的类似函数.

定义 1.7.2 对任意的实数 $x \geqslant 1$, Smarandache 双阶乘函数的类似函数定义为

$$\mathrm{Sd}f_1(2x) = \min\{2m \in \mathbf{N} : 2x \leqslant (2m)!!\},$$
$$\mathrm{Sd}f_1(2x+1) = \min\{2m+1 \in \mathbf{N} : (2x+1) \leqslant (2m+1)!!\}.$$

显然当 $x \in ((m-2)!!, m!!](m \geqslant 2)$, $\mathrm{Sd}f_1(n) = m$.

本节主要利用初等方法研究关于 Smarandache 双阶乘函数及其类似函数的一些均值性质.

引理 1.7.1 如果 $2 \nmid n$ 且 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准素因数分解式, 有

$$\mathrm{Sd}f(n) = \max\{\mathrm{Sd}f(p_1^{\alpha_1}), \mathrm{Sd}f(p_2^{\alpha_2}), \cdots, \mathrm{Sd}f(p_k^{\alpha_k})\}.$$

证明 设 $m_i = \mathrm{Sd}f(p_i^{\alpha_i})$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 则应有 $2 \nmid m_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 和

$$p_i^{\alpha_i}|(m_i)!!, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

再设 $m = \max\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$, 则

$$(m_i)!!|m!!, \quad i = 1, 2, \cdots, k,$$

因此有

$$p_i^{\alpha_i}|m!!, \quad i=1,2,\cdots,k.$$

注意到 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是不同的奇素数, 则有 $({p_i}^{\alpha_i},{p_j}^{\alpha_j})=1\ (1\leqslant i<j\leqslant k)$, 因此 $n|m!!$, 即

$$\mathrm{Sd}f(n)\leqslant m.$$

另一方面, 由 m 的定义, 如果 $\mathrm{Sd}f(n)<m$, 则存在 n 的某个素数幂因子 $p_j^{\alpha_j}(1\leqslant j\leqslant k)$ 满足

$$p_j^{\alpha_j}|\mathrm{Sd}f(n)!!,$$

这样就有 $n|\mathrm{Sd}f(n)!!$, 于是出现了矛盾. 所以 $\mathrm{Sd}f(n)=m$.

引理 1.7.2 对正整数 $n(2\nmid n)$, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准素因数分解式, $P(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{p_i\}$. 如果存在 $P(n)$ 满足 $P(n)>\sqrt{n}$, 有

$$\mathrm{Sd}f(n)=P(n).$$

证明 首先令 $\mathrm{Sd}f(n)=m$, 则 m 是满足 $n|m!!$ 的最小正整数. 现在证明 $m=P(n)$. 假定 $P(n)=p_0$, 由 $P(n)$ 的定义和引理 1.7.1, $\mathrm{Sd}f(n)=\max\{p_0,(2\alpha_i-1)p_i\}$. 因此有

(1) 如果 $\alpha_i=1$, 则 $\mathrm{Sd}f(n)=p_0\geqslant n^{\frac{1}{2}}\geqslant(2\alpha_i-1)p_i$;

(2) 如果 $\alpha_i\geqslant 2$, 则 $\mathrm{Sd}f(n)=p_0>2n^{\frac{1}{4}}\ln n>(2\alpha_i-1)p_i$.

结合 (1), (2), 很容易有

$$\mathrm{Sd}f(n)=P(n).$$

定理 1.7.1 对任意的实数 $x\geqslant 2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{Sd}f(n)=\frac{7\pi^2}{24}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

证明 首先, 将定理中的和式分成两部分, 即

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{Sd}f(n)=\sum_{u\leqslant\frac{x-1}{2}}\mathrm{Sd}f(2u+1)+\sum_{u\leqslant\frac{x}{2}}\mathrm{Sd}f(2u).$$

对第一部分, 定义集合 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 如下:

$$\mathcal{A}=\{2u+1|2u+1\leqslant x,P(2u+1)\leqslant\sqrt{2u+1}\},$$

$$\mathcal{B}=\{2u+1|2u+1\leqslant x,P(2u+1)>\sqrt{2u+1}\}.$$

由 Euler 求和公式可得

$$\sum_{2u+1\in\mathcal{A}} \mathrm{Sd}f(2u+1) \ll \sum_{2u+1\leqslant x} \sqrt{2u+1}\ln(2u+1) \ll x^{\frac{3}{2}\ln x}.$$

同样地, 由 Abel 恒等式也可得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{2u+1\in\mathcal{B}} \mathrm{Sd}f(2u+1)\\
=&\sum_{\substack{2u+1\leqslant x\\ P(2u+1)>\sqrt{2u+1}}} P(2u+1)\\
=&\sum_{1\leqslant 2l+1\leqslant\sqrt{x}}\ \sum_{2l+1\leqslant p\leqslant\frac{x}{2l+1}} p+O\left(\sum_{2l+1\leqslant\sqrt{x}}\ \sum_{\sqrt{2l+1}\leqslant p\leqslant\frac{x}{2l+1}}\sqrt{x}\right)\\
=&\sum_{1\leqslant 2l+1\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x}{2l+1}\pi\left(\frac{x}{2l+1}\right)-(2l+1)\pi(2l+1)-\int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{2l+1}}\pi(s)\mathrm{d}s\right)\\
&+O\left(x^{\frac{3}{2}}\ln x\right),
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant 2l+1\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x}{2l+1}\pi\left(\frac{x}{2l+1}\right)-(2l+1)\pi(2l+1)-\int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{2l+1}}\pi(s)\mathrm{d}s\right)\\
=&\sum_{1\leqslant 2l+1\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{(2l+1)^2\ln\frac{x}{2l+1}}-\frac{1}{2}\frac{(2l+1)^2}{\ln(2l+1)}\right)+O\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{(2l+1)^2\ln^2\frac{x}{2l+1}}\right)\\
&+O\left(\frac{(2l+1)^2}{\ln^2(2l+1)}\right)+O\left(\frac{x^2}{(2l+1)^2\ln^2\frac{x}{2l+1}}-\frac{(2l+1)^2}{\ln^2(2l+1)}\right),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant 2l+1\leqslant\sqrt{x}}\frac{x^2}{(2l+1)^2\ln\frac{x}{2l+1}}=\sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{\sqrt{x}-1}{2}}\frac{x^2}{(2l+1)^2\ln\frac{x}{2l+1}}\\
=&\sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{\ln x-1}{2}}\frac{x^2}{(2l+1)^2\ln x}+O\left(\sum_{\frac{\ln x-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{\sqrt{x}-1}{2}}\frac{x^2\ln(2l+1)}{(2l+1)^2\ln^2 x}\right)\\
=&\frac{\pi^2}{8}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).
\end{aligned}$$

结合上面的结果不难得出

$$\sum_{u\leqslant \frac{x-1}{2}} \mathrm{Sd}f(2u+1)=\frac{\pi^2}{8}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

对于第二部分, 注意到 $2u=2^{\alpha}n_1$(这里 α, n_1 是正整数且 $2\nmid n_1$), 设 $S(2u)=\min\{m: 2u|m!\}$, 由 $\mathrm{Sd}f(2u)$ 的定义, 则

$$\sum_{2u\leqslant x} \mathrm{Sd}f(2u)=\sum_{\substack{2^{\alpha}n_1\leqslant x\\ 2^{\alpha}>n_1}} \mathrm{Sd}f(2^{\alpha}n_1)\ll \sum_{\alpha\leqslant \frac{\ln x}{\ln 2}}\sqrt{x}\ll \sqrt{x}\ln x,$$

$$\sum_{2u\leqslant x} \mathrm{Sd}f(2u)=2\sum_{2u\leqslant x} S(2u)+O(\sqrt{x}\ln x)=\frac{\pi^2}{6}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

所以有

$$\sum_{u\leqslant \frac{x}{2}} \mathrm{Sd}f(2u)=\frac{\pi^2}{6}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

结合第一和第二部分的结果即可得渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} \mathrm{Sd}f(n)=\frac{7\pi^2}{24}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

于是完成了定理 1.7.1 的证明.

引理 1.7.3 对任意的正整数 m 和 n 满足 $(m-2)!!<n\leqslant m!!$, 则有渐近公式

$$m=\frac{2\ln n}{\ln\ln n}+O\left(\frac{(\ln n)(\ln\ln\ln n)}{(\ln\ln n)^2}\right).$$

证明 分两种情形进行讨论.

(1) 如果 $m=2u$, 则 $(2u-2)!!<n\leqslant(2u)!!$. 对不等式两边同时取对数,

$$(u-1)\ln 2+\sum_{i=1}^{u-1}\ln i<\ln n\leqslant u\ln 2+\sum_{i=1}^{u}\ln i.$$

由 Euler 求和公式可得

$$\sum_{i=1}^{u}\ln i=\int_1^u \ln t\mathrm{d}t+\int_1^u (t-[t])(\ln t)'\mathrm{d}t=u\ln u-u+O(\ln u)$$

和

$$\sum_{i=1}^{u-1}\ln i=\sum_{i=1}^{u}\ln i+O(\ln u)=u\ln u-u+O(\ln u).$$

结合上述三式, 便有

$$\ln n = u\ln u + (\ln 2 - 1)u + O(\ln u).$$

因此

$$u = \frac{\ln n}{\ln u + (\ln 2 - 1)} + O(1).$$

对上式连续取两次对数, 有

$$\ln u = \ln\ln n + O(\ln\ln u)$$

和

$$\ln\ln u = O(\ln\ln\ln n).$$

从而

$$u = \frac{\ln n}{\ln\ln n} + O\left(\frac{(\ln n)(\ln\ln\ln n)}{(\ln\ln n)^2}\right).$$

(2) 如果 $m = 2u+1$, 则 $(2u-1)!! < n \leqslant (2u+1)!!$. 对不等式两边同时取对数, 便有

$$\sum_{i=1}^{2u}\ln i - \left(u\ln 2 + \sum_{i=1}^{u}\ln i\right) < \ln n \leqslant \sum_{i=1}^{2u+1}\ln i - \left(u\ln 2 + \sum_{i=1}^{u}\ln i\right). \tag{1-8}$$

由 Euler 求和公式可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2u}\ln i &= \int_1^{2u}\ln t\mathrm{d}t + \int_1^{2u}(t-[t])(\ln t)'\mathrm{d}t\\ &= 2u\ln u + 2(\ln 2 - 1)u + O(\ln u)\end{aligned} \tag{1-9}$$

和

$$\sum_{i=1}^{2u+1}\ln i = 2u\ln u + 2(\ln 2 - 1)u + O(\ln u).$$

结合式 (1-8)、式 (1-9), 易有

$$\ln n = u\ln u + (\ln 2 - 1)u + O(\ln u).$$

于是

$$u = \frac{\ln n}{\ln\ln n} + O\left(\frac{(\ln n)(\ln\ln\ln n)}{(\ln\ln n)^2}\right).$$

结合情形 (1), (2) 可得到

$$m = \frac{2\ln n}{\ln\ln n} + O\left(\frac{(\ln n)(\ln\ln\ln n)}{(\ln\ln n)^2}\right).$$

于是完成了引理 1.7.3 的证明.

定理 1.7.2 对任意的实数 $x \geqslant 2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} \mathrm{Sd}f_1(n) = \frac{2x\ln x}{\ln\ln x} + O\left(\frac{x(\ln x)(\ln\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

证明 由 $\mathrm{Sd}f_1(n)$ 的定义和引理 1.7.3, 则对任意的实数 $x \geqslant 2$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} \mathrm{Sd}f_1(n) &= \sum_{\substack{n\leqslant x\\(m-2)!!<n\leqslant m!!}} m\\&= \sum_{n\leqslant x}\left(\frac{2\ln n}{\ln\ln n} + O\left(\frac{(\ln n)(\ln\ln\ln n)}{(\ln\ln n)^2}\right)\right)\\&= 2\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln n}{\ln\ln n} + O\left(\frac{x(\ln x)(\ln\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^2}\right).\end{aligned}$$

由 Euler 求和公式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln n}{\ln\ln n} &= \int_2^x \frac{\ln t}{\ln\ln t}\mathrm{d}t + \int_2^x (t-[t])\left(\frac{\ln t}{\ln\ln t}\right)'\mathrm{d}t + \frac{\ln x}{\ln\ln x}(x-[x])\\&= \frac{x\ln x}{\ln\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln\ln x}\right).\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n\leqslant x} \mathrm{Sd}f_1(n) = \frac{2x\ln x}{\ln\ln x} + O\left(\frac{x(\ln x)(\ln\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

于是完成了定理 1.7.2 的证明.

1.8 Smarandache 三阶乘函数的均值

文献 [12] 介绍了 Smarandache 三阶乘函数的定义, 即

定义 1.8.1 对任意的正整数 n, Smarandache 三阶乘函数 $d3_f(n)$ 定义为最小的正整数满足 $n|d3_f(n)!!!$.

关于这个函数的研究是比较重要的, 因为它可以帮助计算 Smarandache 函数.

定义 1.8.2 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 定义为

$$\Lambda(n) = \begin{cases}\ln p, & n = p^\alpha, p \text{ 是一素数}, \alpha \text{ 是任意的正整数},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

本节的主要内容是讨论 Smarandache 三阶乘函数与其他一些数论函数的混合均值性质.

引理 1.8.1　对任意的正整数 α, 如果 $p \geqslant 3\alpha-2$, 有

$$d3_f(p^\alpha)=(3\alpha-2)p.$$

证明　由于

$$((3\alpha-2))!!!=(3\alpha-2)p\cdots(3\alpha-3)p\cdots p,$$

所以 $p^\alpha|((3\alpha-2))!!!$. 又如果 $p \geqslant 3\alpha-2$, 则 $(3\alpha-2)p$ 就是最小的正整数使得 $((3\alpha-2))!!!$ 是 p^α 的倍数. 因此 $d3_f(p^\alpha)=(3\alpha-2)p$.

定理 1.8.1　如果 $x \geqslant 2$, 则对任意的正整数 k, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda_1(n)d3_f(n)=x^2\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{k-1}\frac{a_m}{\ln^m x}\right)+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right),$$

其中

$$\Lambda_1(n)=\begin{cases}\ln p, & n\text{ 是素数 } p,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$a_m(m=1,2,\cdots,k-1)$ 是可计算的常数.

证明　定义数论函数

$$a(n)=\begin{cases}1, & n\text{ 是素数},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对任意的正整数 k, 有

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)=\pi(x)=\frac{x}{\ln x}\left(1+\sum_{m=1}^{k-1}\frac{m!}{\ln^m x}\right)+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right).$$

由 Abel 恒等式得

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant x}\Lambda_1(n)d3_f(n)\\ =&\sum_{p\leqslant x}p\ln p=\sum_{n\leqslant x}a(n)n\ln n\\ =&\pi(x)\cdot x\ln x-\int_2^x\pi(t)(\ln t+1)\mathrm{d}t\\ =&x^2\left(1+\sum_{m=1}^{k-1}\frac{m!}{\ln^m x}\right)+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)\end{aligned}$$

$$-\int_2^x \left(t+\frac{t}{\ln t}+t\sum_{m=1}^{k-1}\frac{m!}{\ln^m t}+\frac{t}{\ln t}\sum_{m=1}^{k-1}\frac{m!}{\ln^m t}+O\left(\frac{t(\ln t+1)}{\ln^{k+1} t}\right)\right)\mathrm{d}t$$

$$=x^2\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{k-1}\frac{a_m}{\ln^m x}\right)+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right),$$

其中 $a_m(m=1,2,\cdots,k-1)$ 是可计算的常数. 于是完成了定理 1.8.1 的证明.

定理 1.8.2 如果 $x\geqslant 2$, 则对任意的正整数 k, 有

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)d3_f(n)=x^2\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{k-1}\frac{a_m}{\ln^m x}\right)+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right).$$

证明 由 $d3_f(n)$ 的定义, 对任意的素数 p, 显然有 $d3_f(p^\alpha)\leqslant(3\alpha-1)p$. 由引理 1.8.1, 则有

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)d3_f(n)=\sum_{p^\alpha\leqslant x}\ln p[(3\alpha-2)p]+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x\\ p<3\alpha-2}}\ln p[d3_f(p^\alpha)-(3\alpha-2)p].$$

注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{p^\alpha\leqslant x}(3\alpha-2)p\ln p-\sum_{p\leqslant x}p\ln p\\ =&\sum_{\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln p}}\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}p\ln p(2\alpha-1)-\sum_{p^\alpha\leqslant x}p\ln p\\ =&\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln p}}\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}p\ln p(3\alpha-2)\\ \ll&\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln p}}\alpha x^{\frac{2}{\alpha}}\ln x^{\frac{1}{\alpha}}\ll x\ln^3 x\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x\\ p<3\alpha-2}}\ln p[d3_f(p^\alpha)-(3\alpha-2)p]\\ \ll&\sum_{\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln 2}}\sum_{p<3\alpha-2}\alpha p\ln p\\ \ll&\sum_{\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln 2}}(3\alpha-2)^2\alpha\ln(3\alpha-2)\ll\ln^3 x.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n\leqslant x} A(n)d3_f(n) = x^2\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{k-1}\frac{a_m}{\ln^m x}\right)+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right).$$

于是完成了定理 1.8.2 的证明.

1.9　伪序列的均值

定义 1.9.1　设 n 为任意给定的正整数, 如果经过若干次置换 n 的各位数字后, 所得新数 (包括 n 本身) 能被 5 整除, 称 n 为伪 5 倍数. 例如,51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 101, 102, 103, 104, $\cdots$ 都是伪 5 倍数.

同样可以定义伪偶数和伪奇数. 在本节中, 用初等方法来给出关于伪序列的一些性质.

定义 1.9.2　定义 $A(n)$ 为一个伪数字的各位数之和, 即当$n=a_k10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\cdots+a_1 10+a_0$ 时,

$$A(n)=\sum_{i=0}^{k} a_i.$$

用 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 分别表示伪 5 倍数、伪偶数、伪奇数的集合.

引理 1.9.1　对任意的实数 $x\geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} A^m(n) = O\left(x(\ln x)^{m-1}\right).$$

证明　参阅文献 [1].

引理 1.9.2　对任意的实数 $x\geqslant 1$, 令 $\overline{\mathcal{A}}$ 表示集合 $\mathcal{A}$ 的补集, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\overline{\mathcal{A}}}} A^m(n) = O\left(\frac{x(\ln x)^m}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\ln x}}\right).$$

证明　由集合 $\overline{\mathcal{A}}$ 的定义, 已知集合 $\overline{\mathcal{A}}$ 中的每个数的十进制的各位数为 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. 因此, 在 $\overline{\mathcal{A}}$ 中就有 8^m 个 m 位数. 所以, 对任何正整数 n, 存在一个 k, 使得 $10^{k-1}\leqslant x<10^k$, 则

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\overline{\mathcal{A}}}} A^m(n) \leqslant \sum_{t=1}^{k}\sum_{\substack{10^{t-1}\leqslant x<10^t\\ n\in\overline{\mathcal{A}}}} A^m(n).$$

注意到

$$\sum_{\substack{10^{t-1}\leqslant x<10^t\\ n\in\overline{\mathcal{A}}}} A^m(n) < (9t)^m\times 8^t,$$

所以

$$\sum_{t=1}^{k}\sum_{\substack{10^{t-1}\leqslant x<10^{t}\\ n\in\overline{A}}}A^{m}(n)<\sum_{t=1}^{k}(9t)^{m}\times 8^{t}<9^{m}\times k^{m}\times 8^{k+1}.$$

由于 $k\leqslant \ln x+1<k+1$, 所以

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\overline{A}}}A^{m}(n)=O\left((\ln x)^{m}\times 8^{\ln x}\right)=O\left(\frac{x(\ln x)^{m}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\ln x}}\right).$$

利用同样的方法, 可得到

引理 1.9.3 对任意的实数 $x\geqslant 1$, 令 $\overline{B}$ 表示集合 B 的补集, 则有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\overline{B}}}A^{m}(n)=O\left(\frac{x(\ln x)^{m}}{2^{\ln x}}\right).$$

引理 1.9.4 对任意的实数 $x\geqslant 1$, 令 $\overline{C}$ 表示集合 C 的补集, 则有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\overline{C}}}A^{m}(n)=O\left(\frac{x(\ln x)^{m}}{2^{\ln x}}\right).$$

定理 1.9.1 对任意的实数 $x\geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}A^{m}(n)=x\left(\frac{9}{2}\ln x\right)^{m}+O\left(x(\ln x)^{m-1}\right).$$

证明 由伪 5 倍数的定义和引理 1.9.1, 引理 1.9.2, 有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}A^{m}(n)&=\sum_{n\leqslant x}A^{m}(n)-\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\overline{A}}}A^{m}(n)\\ &=x\left(\frac{9}{2}\ln x\right)^{m}+O\left(x(\ln x)^{m-1}\right)-O\left(x\frac{(\ln x)^{m}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\ln x}}\right)\\ &=x\left(\frac{9}{2}\ln x\right)^{m}+O\left(x(\ln x)^{m-1}\right).\end{aligned}$$

于是完成了定理 1.9.1 的证明.

利用同样的方法可得到下面两个定理:

定理 1.9.2　对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\mathcal{B}}} A^m(n) = x\left(\frac{9}{2}\ln x\right)^m + O\left(x(\ln x)^{m-1}\right).$$

定理 1.9.3　对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\mathcal{C}}} A^m(n) = x\left(\frac{9}{2}\ln x\right)^m + O\left(x(\ln x)^{m-1}\right).$$

1.10　Smarandache 类似函数的均值

在文献 [11] 中, Sandor 定义了 Smarandache 类似函数.

定义 1.10.1　对任意的实数 $x > 1$, Smarandache 类似函数为

$$S_1(x) = \min\{m \in \mathbf{N} : x \leqslant m!\}.$$

显然这个函数是定义在实数的子集上的. 而且对 $m \geqslant 2$, 当 $x \in [(m-1)!, m!]$ 时, $S_1(x) = m$ (对 $m = 1$ 没有定义, 因为 $0! = 1! = 1$), 所以这个函数是定义在 $x > 1$ 上的.

引理 1.10.1　对任意的正整数 m 和 n, 如果 $(m-1)! < n \leqslant m!$, 有

$$m = \frac{\ln n}{\ln\ln n} + O(1).$$

证明　对不等式 $(m-1)! < n \leqslant m!$ 两边取对数

$$\sum_{i=1}^{m-1} \ln i < \ln n \leqslant \sum_{i=1}^{m} \ln i.$$

应用 Euler 求和公式, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \ln i &= \int_1^m \ln t\mathrm{d}t + \int_1^m (t-[t])(\ln t)'\mathrm{d}t\\ &= m\ln m - m + O(\ln m)\end{aligned}$$

和

$$\sum_{i=1}^{m-1} \ln i = m\ln m - m + O(\ln m),$$

由此得

$$\ln n = m\ln m - m + O(\ln m).$$

从而

$$m = \frac{\ln n}{\ln m - 1} + O(1).$$

同样对上式两边取对数, 则

$$\ln m = \ln\ln n + O(\ln\ln m)$$

和

$$\ln\ln m = O(\ln\ln\ln n).$$

因此

$$m = \frac{\ln n}{\ln\ln n} + O(1).$$

于是完成了引理 1.10.1 的证明.

定理 1.10.1 对任意的实数 $x \geqslant 2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S_1(x) = \frac{x\ln x}{\ln\ln x} + O(x).$$

证明 对任意的实数 $x \geqslant 2$, 由 $S_1(n)$ 的定义和引理 1.10.1, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} S_1(x) &= \sum_{\substack{n\leqslant x\\(m-1)!<n\leqslant m!}} m\\&= \sum_{n\leqslant x}\left(\frac{\ln n}{\ln\ln n} + O(1)\right)\\&= \sum_{n\leqslant x}\frac{\ln n}{\ln\ln n} + O(x).\end{aligned}$$

由 Euler 求和公式

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln n}{\ln\ln n} &= \int_2^x \frac{\ln t}{\ln\ln t}\mathrm{d}t + \int_2^x (t-[t])\left(\frac{\ln t}{\ln\ln t}\right)'\mathrm{d}t + \frac{\ln x}{\ln\ln x}(x-[x])\\&= \frac{x\ln x}{\ln\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln\ln x}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n\leqslant x} S_1(x) = \frac{x\ln x}{\ln\ln x} + O(x).$$

于是完成了定理 1.10.1 的证明.

1.11 包含 Smarandache 函数的混合均值

著名的 Smarandache 函数 $S(n)$, 对任意正整数 n, 如果 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准素因数分解式, 则有

$$S(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{S(p_i^{\alpha_i})\}.$$

当然也不难推断, 对于素数 p 有 $S(p) = p$, 并且除 $n = 4$ 和 $n = p$ 外有 $S(n) < n$. 因此下列关系式显而易见

$$\pi(x) = -1 + \sum_{n=2}^{[x]} \left[\frac{S(n)}{n} \right].$$

另外, 定义函数 $L(n)$ 为不大于 n 的所有正整数的最小公倍数, 即

$$L(n) = [1,\ 2,\ \cdots,\ n].$$

这部分内容的主要目的是利用初等方法研究复合函数 $S(L(n))$ 的均值性质, 即

定理 1.11.1 对任意实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} S(L(n)) = \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^{\frac{23}{18}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 表示任意给定的正数.

为了完成定理的证明, 需要 Heath-Brown 的一个著名结果 (参阅文献 [13]), 即

引理 1.11.1 设 p_n 表示第 n 个素数, $d_n = p_{n+1} - p_n$, 有

$$\sum_{p_n \leqslant x} {d_n}^2 \ll x^{\frac{23}{18}+\varepsilon},$$

其中 ε 表示任意给定的正数.

下面将完成定理的证明. 设 ${p_1}^{\beta_1}{p_2}^{\beta_2}\cdots{p_s}^{\beta_s}$ 为 $L(n)$ 的标准素因数分解式, 考虑到当 $\sqrt{n} < p_i \leqslant n$ 时, $\beta_i = \beta(p_i) = 1$. 所以有

$$\begin{aligned} L(n) &= [1,\ 2, \cdots,\ n] = {p_1}^{\beta(p_1)}{p_2}^{\beta(p_2)} \cdots {p_s}^{\beta(p_s)} \\ &= \prod_{p \leqslant \sqrt{n}} p^{\beta(p)} \prod_{\sqrt{n} < p \leqslant n} p\ . \end{aligned}$$

由于 ${p_i}^{\beta(p_i)} \leqslant n$, 且对较大的 n, 注意到 $\frac{n}{2} \leqslant p_{\pi(n)} \leqslant n$, 所以当 $\beta(p_i) \geqslant 2$ 时由函数 $S(n)$ 的定义及性质有 $S\left(p_i^{\beta(p_i)}\right) \leqslant \beta(p_i)p_i \leqslant \beta(p_i)\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n}\ln n \leqslant p_{\pi(n)}$, 因此结合上式, 当 n 较大时函数 $S(L(n))$ 满足

$$S(L(n)) = \max\left\{S({p_1}^{\beta_1}), S({p_2}^{\beta_2}), \cdots, S({p_s}^{\beta_s})\right\} = p_{\pi(n)}.$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} S(L(n)) &= \sum_{n \leqslant x} p_{\pi(n)} + O(1) \\ &= \sum_{p_1 \leqslant n < p_2} p_{\pi(n)} + \sum_{p_2 \leqslant n < p_3} p_{\pi(n)} + \cdots + \sum_{p_{\pi(x)} \leqslant n < x} p_{\pi(n)} + O(1) \\ &= p_1(p_2 - p_1) + p_2(p_3 - p_2) + \cdots + p_{\pi(x)}(x - p_{\pi(x)}) + O(1) \end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{2}(p_2-p_1)^2+\frac{1}{2}{p_2}^2-\frac{1}{2}{p_1}^2-\frac{1}{2}(p_3-p_2)^2+\frac{1}{2}{p_3}^2-\frac{1}{2}{p_2}^2$$
$$-\cdots-\frac{1}{2}(x-p_{\pi(x)})^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}p_{\pi(x)}^2+O(1)$$
$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\sum_{p_n\leqslant x}(p_{n+1}-p_n)^2+O(1).$$

结合引理 1.11.1 及上式有

$$\sum_{n\leqslant x}S(L(n))=\frac{1}{2}x^2+O\left(x^{\frac{23}{18}+\varepsilon}\right).$$

于是完成了定理 1.11.1 的证明.

1.12 k 次幂部分剩余函数的均值

对于任意正整数 n, k 次幂完全数 $b_k(n)$ 定义为能够使得 $nb_k(n)$ 成为完全 k 次幂数的最小正整数. 类似于 k 次幂完全数, 徐哲峰在文献 [14] 定义了可加的 k 次幂完全数 $a_k(n)$ 为能够使得 $n+a_k(n)$ 为完全 k 次幂数的最小非负整数. 作为文献 [14] 的一般情况, 有

定义 1.12.1 *k 次幂部分剩余函数 $f_k(n)$ 为能够使得 $n-f_k(n)$ 为完全 k 次幂数的最小非负整数. 例如, 如果 $k=2$, 有平方剩余序列 $\{f_2(n)\}$: 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 1, 2, $\cdots$.*

同时, 设 p 为素数, $e_p(n)$ 在 1.3 节中定义. 本节运用初等的方法研究函数 $\dfrac{1}{f_k(n)+1}$ 和 $e_p(f_k(n))$ 的均值性质.

首先给出几个简单的引理并作证明.

引理 1.12.1 *对任意实数 $x\geqslant 1$, 有*

$$\sum_{n\leqslant x}e_p(n)=\frac{1}{p-1}x+O(\ln^2 x).$$

证明 参阅文献 [15].

引理 1.12.2 *设 $h(n)$ 为非负的算术函数且 $h(0)=0$. 那么, 对任意实数 $x\geqslant 1$, 有*

$$\sum_{n\leqslant x}h(f_k(n))=\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{n\leqslant g(t)}h(n)+O\Bigg(\sum_{n\leqslant g(M)}h(n)\Bigg),$$

其中 $g(t)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}\dbinom{k}{i}t^i$ 和 $M=\left[x^{\frac{1}{k}}\right]$.

证明 对任意实数 $x \geqslant 1$, M 为给定的正整数使得

$$M^k \leqslant x < (M+1)^k.$$

注意到如果 n 取遍区间 $[t^k, (t+1)^k)$ 的整数, 那么 $f_k(n)$ 取遍 $[0, (t+1)^k - t^k)$ 的所有整数, 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} h(f_k(n)) &= \sum_{t=1}^{M-1} \sum_{t^k\leqslant n<(t+1)^k} h(f_k(n)) + \sum_{M^k\leqslant n\leqslant x} h(f_k(n)) \\
&= \sum_{t=1}^{M-1} \sum_{n\leqslant g(t)} h(n) + \sum_{0\leqslant n<x-M^k} h(n) \\
&= \sum_{t=1}^{M-1} \sum_{n\leqslant g(t)} h(n) + O\left(\sum_{0\leqslant n\leqslant (M+1)^k-M^k} h(n) \right) \\
&= \sum_{t=1}^{M-1} \sum_{n\leqslant g(t)} h(n) + O\left(\sum_{n\leqslant g(M)} h(n) \right).
\end{aligned}$$

于是完成了引理 1.12.2 的证明.

引理 1.12.3 对任意实数 $x > 1$, 有

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

证明 参阅文献 [3].

引理 1.12.4 对任意实数 $x \geqslant 3$, 有

$$\sum_{n\leqslant x} f_k(n) = \frac{k^2}{2(2k-1)} x^{2-\frac{1}{k}} + O\left(x^{2-\frac{2}{k}}\right).$$

证明 设 $h(n) = n$, $M = \left[x^{\frac{1}{k}}\right]$, 那么由引理 1.12.2 和 Euler 求和公式, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} f_k(n) &= \sum_{t=1}^{M-1} \sum_{n\leqslant g(t)} n + O\left(\sum_{n\leqslant g(M)} n \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} k^2 t^{2k-2} + O\left(x^{2-\frac{2}{k}}\right) \\
&= \frac{k^2}{2(2k-1)} x^{2-\frac{1}{k}} + O\left(x^{2-\frac{2}{k}}\right).
\end{aligned}$$

于是完成了引理 1.12.4 的证明.

定理 1.12.1 对任意实数 $x\geqslant 3$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{f_k(n)+1}=\frac{k-1}{k}x^{\frac{1}{k}}\ln x+(\ln x+\gamma-k+1)x^{\frac{1}{k}}+O(\ln x).$$

证明 设 $h(n)=n$, $M=\left[x^{\frac{1}{k}}\right]$, 那么由引理 1.12.2 和引理 1.12.3 可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{f_k(n)+1}&=\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{n\leqslant g(t)}\frac{1}{n+1}+O\Bigg(\sum_{n\leqslant g(M)}\frac{1}{n+1}\Bigg)\\&=\sum_{t=1}^{M-1}\left(\ln(kt^{k-1})+\ln\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)+\gamma+O\left(\frac{1}{g(t)}\right)\right)+O(\ln x)\\&=(k-1)\ln((M-1)!)+(\ln k+\gamma)(M-1)+O(\ln x)\\&=(k-1)\left(\left(\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1\right)\ln\left(\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1\right)-\left(\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1\right)\right)\\&\quad+(\ln k+\gamma)\left(\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1\right)+O(\ln x)\\&=\frac{k-1}{k}x^{\frac{1}{k}}\ln x+(\ln x+\gamma-k+1)x^{\frac{1}{k}}+O(\ln x).\end{aligned}$$

于是完成了定理 1.12.1 的证明.

定理 1.12.2 对任意实数 $x\geqslant 3$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}e_p(f_k(n))=\frac{1}{p-1}x+O\left(\frac{k}{p-1}x^{1-\frac{1}{k}}\right).$$

证明 注意到 $e_p(n)$ 的定义, 由引理 1.12.1 和引理 1.12.4 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}e_p(f_k(n))&=\sum_{t=1}^{M}\sum_{(t-1)^k\leqslant n<t^k}e_p(f_k(n))+\sum_{M^k\leqslant n<x}e_p(f_k(n))\\&=\sum_{t=1}^{M}\sum_{j=0}^{(t+1)^k-t^k}e_p(j)+O\Bigg(\sum_{M^k\leqslant n<(M+1)^k}e_p(f_k(n))\Bigg)\\&=\sum_{t=1}^{M}\left(\frac{1}{p-1}\left((t+1)^k-t^k\right)+O\left(\ln^2((t+1)^k-t^k)\right)\right)\\&\quad+O\Bigg(\sum_{0\leqslant n<(M+1)^k-M^k}e_p(n)\Bigg)\\&=\frac{1}{p-1}\left((M+1)^k-1\right)+O(\ln^2(kM^k-1))+O\left(\frac{g(M)}{p-1}\right)\\&=\frac{1}{p-1}M^k+O\left(\frac{k}{p-1}M^{k-1}\right).\end{aligned}$$

取 $M=\left[x^{\frac{1}{k}}\right]$, 易得

$$\sum_{n\leqslant x}e_p(f_k(n))=\frac{1}{p-1}x+O\left(\frac{k}{p-1}x^{1-\frac{1}{k}}\right).$$

于是完成了定理 1.12.2 的证明.

第 2 章　可乘函数的均值估计

设数论函数 f:$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 若对任意的 $a,b \in \mathbf{N}$, 且 $(a,b)=1$, 有 $f(ab)=f(a)f(b)$, 则称函数 $f(n)$ 是可乘函数; 若对任意的 $a,b \in \mathbf{N}$, 都有 $f(ab)=f(a)f(b)$, 则称函数 $f(n)$ 是完全可乘函数. 显然由可乘函数的定义不难得出两个 (完全) 可乘函数之积及商 (分母恒不为零) 仍是 (完全) 可乘函数. 这是一类非常重要的函数. 事实上, 利用函数的可乘性, 往往可以把问题归为只研究在素数上的性质, 这就非常有利于对数论函数性质的研究.

2.1　微分函数和积分函数的均值

1.2 节给出了 n 的 m 次补数函数 $a_m(n)$ 的定义, 再定义类似于微分和积分运算的两个数论函数.

定义 2.1.1　微分函数

$$D(n)=D(p_1^{\alpha_1})D(p_2^{\alpha_2})\cdots D(p_s^{\alpha_s}),\quad D(p^{\alpha})=\alpha p^{\alpha-1}.$$

定义 2.1.2　积分函数

$$I(n)=I(p_1^{\alpha_1})I(p_2^{\alpha_2})\cdots I(p_s^{\alpha_s}),\quad I(p^{\alpha})=\frac{1}{\alpha+1}p^{\alpha+1}.$$

本节利用解析方法来研究关于这两个函数在 k 次补数序列中的一些性质, 即

定理 2.1.1　对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{D(a_k(n))}\\ =&\frac{6(k-1)\zeta\left(\dfrac{k}{k-1}\right)x^{\frac{1}{k-1}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p}{p+1}\sum_{i=1}^{k-2}\frac{1}{(k-i)p^{k-1-i}p^{\frac{i}{k-1}}}\right)\\ &+O\left(x^{\frac{2k-1}{2k(k-1)}+\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

其中 ε 是任意的正数.

证明　定义 Dirichlet 级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{D(a_k(n))n^s}.$$

因为 $D(n)$ 和 $a_k(n)$ 都是可乘函数, 由 Euler 乘积公式与 $D(n)$ 和 $a_k(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}
f(s)=&\prod_p\left(1+\frac{1}{D(a_k(p))p^s}+\frac{1}{D(a_k(p^2))p^{2s}}+\cdots\right)\\
=&\prod_p\left(1+\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{(k-i)p^{k-1-i}p^{is}}+\frac{1}{p^{ks}}\right)\left(1+\frac{1}{p^{ks}}+\frac{1}{p^{2ks}}+\cdots\right)\right)\\
=&\zeta(ks)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{(k-1)s}}+\sum_{i=1}^{k-2}\frac{1}{(k-i)p^{k-1-i}p^{is}}\right)\\
=&\frac{\zeta(ks)\zeta((k-1)s)}{\zeta((2k-2)s)}\prod_p\left(1+\frac{p^{(k-1)s}}{p^{(k-1)s}+1}\sum_{i=1}^{k-2}\frac{1}{(k-i)p^{k-1-i}p^{is}}\right).
\end{aligned}$$

显然有不等式

$$\left|\frac{1}{D(a_k(n))}\right|\leqslant 1,\quad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{D(a_k(n))}n^{\sigma}\right|<\frac{1}{\sigma-\dfrac{1}{k-1}},$$

其中 $\sigma>\dfrac{1}{k-1}$ 是 s 的实部.

因此在 Perron 公式中取 $s_0=0$, $b=1+\dfrac{1}{k-1}$, $T=x^{1+\frac{1}{2k(k-1)}}$, $H(x)=1$, $B(\sigma)=\dfrac{1}{\sigma-\dfrac{1}{k-1}}$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{D(a_k(n))}=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{1+\frac{1}{k-1}-\mathrm{i}T}^{1+\frac{1}{k-1}+\mathrm{i}T}\frac{\zeta(ks)\zeta((k-1)s)}{\zeta((2k-2)s)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\\
&+O\left(x^{\frac{2k-1}{2k(k-1)}+\varepsilon}\right),
\end{aligned}$$

其中

$$R(s)=\prod_p\left(1+\frac{p^{(k-1)s}}{p^{(k-1)s}+1}\sum_{i=1}^{k-2}\frac{1}{(k-i)p^{k-1-i}p^{is}}\right).$$

要计算主项

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{1+\frac{1}{k-1}-\mathrm{i}T}^{1+\frac{1}{k-1}+\mathrm{i}T}\frac{\zeta(ks)\zeta((k-1)s)}{\zeta((2k-2)s)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s,$$

把积分限从 $s=1+\dfrac{1}{k-1}\pm\mathrm{i}T$ 移到 $s=\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{2k(k-1)}\pm\mathrm{i}T$. 这样, 函数

$$f_1(s)=\frac{\zeta(ks)\zeta((k-1)s)}{\zeta((2k-2)s)}R(s)\frac{x^s}{s}$$

在 $s=\dfrac{1}{k-1}$ 处有一个一阶极点, 且函数在该点的留数为

$$\frac{(k-1)\zeta\left(\dfrac{k}{k-1}\right)x^{\frac{1}{k-1}}}{\zeta(2)}R\left(\frac{1}{k-1}\right),$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{1+\frac{1}{k-1}-\mathrm{i}T}^{1+\frac{1}{k-1}+\mathrm{i}T}+\int_{1+\frac{1}{k-1}+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}+\mathrm{i}T}+\int_{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}-\mathrm{i}T}+\int_{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}-\mathrm{i}T}^{1+\frac{1}{k-1}-\mathrm{i}T}\right)\\&\times\frac{\zeta(ks)\zeta((k-1)s)}{\zeta((2k-2)s)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\\&=\frac{(k-1)\zeta\left(\dfrac{k}{k-1}\right)x^{\frac{1}{k-1}}}{\zeta(2)}\prod_p\left(1+\frac{p}{p+1}\sum_{i=1}^{k-2}\frac{1}{(k-i)p^{k-1-i}p^{\frac{i}{k-1}}}\right).\end{aligned}$$

容易估计到

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{1+\frac{1}{k-1}+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}+\mathrm{i}T}+\int_{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}-\mathrm{i}T}^{1+\frac{1}{k-1}-\mathrm{i}T}\right)\frac{\zeta(ks)\zeta((k-1)s)}{\zeta((2k-2)s)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\\&\ll\int_{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}}^{1+\frac{1}{k-1}}\left|\frac{\zeta(k(\sigma+\mathrm{i}T))\zeta((k-1)(\sigma+\mathrm{i}T))}{\zeta((2k-2)(\sigma+\mathrm{i}T))}R(s)\frac{x^{1+\frac{1}{k-1}}}{T}\right|\mathrm{d}\sigma\\&\ll\frac{x^{1+\frac{1}{k-1}}}{T}=x^{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}-\mathrm{i}T}\frac{\zeta(ks)\zeta((k-1)s)}{\zeta((2k-2)s)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\\&\ll\int_0^T\left|\frac{\zeta\left(1+\dfrac{1}{2(k-1)}+\mathrm{i}kt\right)\zeta\left(\dfrac{2k-1}{2k}+\mathrm{i}(k-1)t\right)}{\zeta\left(\dfrac{2k-1}{k}+\mathrm{i}(2k-2)t\right)}\frac{x^{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}}}{t}\right|\mathrm{d}t\\&\ll x^{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k(k-1)}+\varepsilon}.\end{aligned}$$

注意到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, 则有

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{D(a_k(n))}\\&=\frac{6(k-1)\zeta\left(\dfrac{k}{k-1}\right)x^{\frac{1}{k-1}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p}{p+1}\sum_{i=1}^{k-2}\frac{1}{(k-i)p^{k-1-i}p^{\frac{i}{k-1}}}\right)+O\left(x^{\frac{2k-1}{2k(k-1)}+\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

于是完成了定理 2.1.1 的证明.

定理 2.1.2　对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\leqslant x} I(a_k(n))d(a_k(n)) \\
&=\frac{6\zeta(k(k+1))x^{k+1}}{(k+1)\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p}{p+1}\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{p^{k+1-i}}{p^{(k+1)i}}-\frac{1}{p^{k(k+1)}}\right)\right) \\
&+O(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}).
\end{aligned}
$$

证明　定义

$$
g(s)=\sum_{n=1}^{\infty} I(a_k(n))d(a_k(n)),
$$

由 $I(a_k(n))$ 和 $d(a_k(n))$ 的定义, 有

$$
\begin{aligned}
g(s)&=\prod_p\left(1+\frac{I(a_k(p))d(a_k(p))}{p^s}+\frac{I(a_k(p^2))d(a_k(p^2))}{p^{2s}}+\cdots\right) \\
&=\prod_p\left(1+\left(\frac{p^k}{p^s}+\frac{p^{k-1}}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p}{p^{ks}}\right)\left(1+\frac{1}{p^{ks}}+\frac{1}{p^{2ks}}+\cdots\right)\right) \\
&=\zeta(ks)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{ks}}+\frac{p^k}{p^s}+\frac{p^{k-1}}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p}{p^{ks}}\right) \\
&=\frac{\zeta(ks)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}\prod_p\left(1+\frac{p^{s-k}}{p^{s-k}+1}\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{p^{k+1-i}}{p^{is}}-\frac{1}{p^{ks}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

同样利用 Perron 公式和定理 2.1.1 的方法, 即可证明定理 2.1.2.

2.2　可乘函数在无 $k+1$ 次幂因子序列上的均值

定义 2.2.1　不能被 p^k(p 是一素数) 整除的自然数 n, 为无 k 次幂因子数.

可以通过这样的方法来得到无 k 次幂数: 从自然数集 (除去 0 和 1) 去掉所有 2^k 的倍数 (即 2^k, 2^{k+1}, $\cdots$); 去掉所有 3^k 的倍数等.

在此研究这个数列的性质. 定义两个新的数论函数 $U(n)$ 和 $V(n)$:

$$
U(1)=1,\quad U(n)=\prod_{p|n}p,
$$

$$
V(1)=1,\quad V(n)=V(p_1^{\alpha_1})\cdots V(p_r^{\alpha_r})=(p_1^{\alpha_1}-1)\cdots(p_r^{\alpha_r}-1),
$$

其中 n 是任意的自然数且标准素因数分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$. 显然这两个函数都具有可乘性. 通过解析方法来研究这两个函数在无 $k+1$ 次幂序列下的均值性质.

定理 2.2.1 令 $\mathcal{A}$ 表示无 k 次幂数集合, 则对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leqslant x}} U(n) = \frac{3x^2}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p^{2k-2}-1}{p^{2k+1}+p^{2k}-p^{2k-1}-p^{2k-2}}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 是任意的正数.

证明 定义

$$f(s) = 1+\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leqslant x}}\frac{U(n)}{n^s},$$

则由 Euler 乘积公式和 $U(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p\left(1+\frac{U(p)}{p^s}+\frac{U(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{U(p^k)}{p^{ks}}\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{1}{p^{2s-1}}+\cdots+\frac{1}{p^{ks-1}}\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{p^{(k-1)s}-1}{p^{2s-1}(p^{(k-1)s}-p^{(k-2)s})}\right)\\
&= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}\prod_p\left(1+\frac{p^{(k-1)s}-1}{(p^{2s-1}+p^s)(p^{(k-1)s}-p^{(k-2)s})}\right),
\end{aligned}$$

有下面两个不等式:

$$|U(n)| \leqslant n, \quad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(n)}{n^s}\right| < \frac{1}{\sigma-2},$$

这里 $\sigma > 2$ 是 s 的实部. 因此由 Perron 公式有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\frac{U(n)}{n^{s_0}} =& \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T} f(s+s_0)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(\frac{x^b B(b+\sigma_0)}{T}\right)\\
&+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\ln x}{T}\right)\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{\|x\|}\right)\right),
\end{aligned}$$

其中 N 是距离 x 最近的整数, $\|x\| = |x-n|$.

取 $s_0 = 0$, $b = 3$, $T = \dfrac{3}{2}$, $H(x) = x$, $B(s) = \dfrac{1}{s-2}$, 则

$$\sum_{n\leqslant x} U(n) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{3-\mathrm{i}T}^{3+\mathrm{i}T}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

这里

$$R(s) = \prod_p\left(1+\frac{p^{(k-1)s}-1}{(p^{2s-1}+p^s)(p^{(k-1)s}-p^{(k-2)s})}\right).$$

为了估计主项

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{3-\mathrm{i}T}^{3+\mathrm{i}T}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s,$$

把积分限从 $s=3\pm\mathrm{i}T$ 移到 $s=\frac{3}{2}\pm\mathrm{i}T$, 这样

$$f(s)=\frac{\zeta(s-1)x^s}{\zeta(2(s-1))s}R(s)$$

在 $s=2$ 处有一个简单极点, 且函数在该点的留数为 $\frac{x^2}{2\zeta(2)}R(2)$. 因此根据留数定理

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{3-\mathrm{i}T}^{3+\mathrm{i}T}+\int_{3+\mathrm{i}T}^{\frac{3}{2}+\mathrm{i}T}+\int_{\frac{3}{2}+\mathrm{i}T}^{\frac{3}{2}-\mathrm{i}T}+\int_{\frac{3}{2}-\mathrm{i}T}^{3-\mathrm{i}T}\right)\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s$$
$$=\frac{x^2}{2\zeta(2)}\prod_p\left(1+\frac{p^{2k-2}-1}{p^{2k+1}+p^{2k}-p^{2k-1}-p^{2k-2}}\right),$$

很容易得到估计式

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{3+\mathrm{i}T}^{\frac{3}{2}+\mathrm{i}T}+\int_{\frac{3}{2}-\mathrm{i}T}^{3-\mathrm{i}T}\right)\frac{\zeta(s-1)x^s}{\zeta(2(s-1))s}R(s)\mathrm{d}s\right|$$
$$\ll\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left|\frac{\zeta(\sigma-1+\mathrm{i}T)}{\zeta(2(\sigma-1+\mathrm{i}T))}R(s)\frac{x^3}{T}\right|\mathrm{d}\sigma\ll\frac{x^3}{T}=x^{\frac{3}{2}}$$

和

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\frac{3}{2}+\mathrm{i}T}^{\frac{3}{2}-\mathrm{i}T}\frac{\zeta(s-1)x^s}{\zeta(2(s-1))s}R(s)\mathrm{d}s\right|\ll\int_0^T\left|\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)}{\zeta(1+2\mathrm{i}t)}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{t}\right|\mathrm{d}t\ll x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}.$$

又 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, 由以上的结果, 即可得到

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leqslant x}}U(n)=\frac{3x^2}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p^{2k-2}-1}{p^{2k+1}+p^{2k}-p^{2k-1}-p^{2k-2}}\right)+O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}).$$

于是完成了定理 2.2.1 的证明.

定理 2.2.2　对任意的实数 $x\geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leqslant x}}V(n)=\frac{x^2}{2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{k+1}}-\frac{p^{2k+1}+p^{2k}-p-1}{p^{2k+3}+p^{2k+1}}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

证明 定义

$$g(s) = 1 + \sum_{\substack{n \in \mathcal{A} \\ n \leqslant x}} \frac{V(n)}{n^s}.$$

由 Euler 乘积公式和 $V(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}
g(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{V(p)}{p^s} + \frac{V(p^2)}{p^{2s}} + \cdots + \frac{V(p^k)}{p^{ks}}\right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{p-1}{p^s} + \frac{p^2-1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p^k-1}{p^{ks}}\right) \\
&= \prod_p \left(\frac{1 - \dfrac{1}{p^{(k+1)(s-1)}}}{1 - \dfrac{1}{p^{s-1}}} - \frac{1 - \dfrac{1}{p^{ks}}}{p^s - 1}\right) \\
&= \zeta(s-1) \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{(k+1)(s-1)}} - \frac{(p^{ks}-1)(p^{s-1}+1)}{(p^{ks} - p^{(k-1)s})p^{2s-1}}\right).
\end{aligned}$$

利用 Perron 公式和证明定理 2.2.1 的方法, 即可证明定理 2.2.2.

2.3 Smarandache 幂函数的均值

定义 2.3.1 对于给定的自然数 n, Smarandache 幂函数 $\mathrm{SP}(n)$ 定义为

$$\mathrm{SP}(n) = \min\{m |\ n | m^m, m \in \mathbf{N}\}.$$

当 n 取遍自然数时, $\mathrm{SP}(n)$ 便得到了如下的一个数列:1, 2, 3, 2, 5, 6, 7, 4, 3, 10, 11, 6, 13, 14, 15, 4, 17, 6,19, 10, $\cdots$, 如果 n 是一个素数的方幂即 $n = p^\alpha$, 则有

$$\mathrm{SP}(n) = \begin{cases} p, & 1 \leqslant \alpha \leqslant p, \\ p^2, & p+1 \leqslant \alpha \leqslant 2p^2, \\ p^3, & 2p^2+1 \leqslant \alpha \leqslant 3p^3, \\ \cdots\cdots \\ p^\alpha, & (\alpha-1)p^{\alpha-1}+1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha p^\alpha. \end{cases}$$

如果 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, 且对所有的 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 都有 $\alpha_i \leqslant p_i$, 那么 $\mathrm{SP}(n) = U(n)$, 其中 $U(n) = \prod\limits_{p|n} p$. 令 $\mathcal{A}$ 表示所有具有这个性质的 n 的集合, 则 $\mathrm{SP}(n)$ 在集合 $\mathcal{A}$ 上具有可乘性, 即对任意的 n_1, $n_2 \in \mathcal{A}$, 如果 $(n_1, n_2) = 1$, 则 $\mathrm{SP}(n_1 n_2) = \mathrm{SP}(n_1)\mathrm{SP}(n_2)$. 然而对所有的自然数 n, $\mathrm{SP}(n)$ 不是可乘函数, 比如 $\mathrm{SP}(8) = 4$, $\mathrm{SP}(3) =$

3, 而 $\mathrm{SP}(24)=6\neq \mathrm{SP}(8)\mathrm{SP}(8)$. 因此对 $\mathrm{SP}(n)$ 的均值性质研究就显得十分困难, 但是对于大部分的 n, $\mathrm{SP}(n)$ 的值等于函数 $U(n)$ 的值, 所以在 $\mathrm{SP}(n)$ 的许多均值问题研究中, 可以利用可乘函数 $U(n)$ 代替非可乘函数 $\mathrm{SP}(n)$, 用解析方法来研究该函数的均值分布性质.

引理 2.3.1 对任意的实数 $x\geqslant 1$, 有

$$\sum_{n\leqslant x}U(n)=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 是任意给定的正数.

证明 定义 Dirichlet 级数 $f(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{U(n)}{n^s}$.

由 $U(n)$ 的定义可知 $U(n)$ 是一可乘函数, 那么由 Euler 乘积公式, 可得

$$\begin{aligned}f(s)&=\prod_p\left(1+\frac{U(p)}{p^s}+\frac{U(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right)=\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}+\frac{p}{p^{2s}}+\cdots\right)\\&=\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}+\cdots\right)=\zeta(s)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{s-1}}\right)\\&=\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p^{s-1}+1)}\right).\end{aligned}$$

因为 $|U(n)|\leqslant n$, $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{U(n)}{n^\sigma}\right|<\zeta(\sigma-1)$, 其中 $\sigma>2$ 为 s 的实部, 则由 Perron 公式, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{a(n)}{n^{s_0}}=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}f(s+s_0)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)\\&+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\ln x}{T}\right)\right)\\&+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|x\|}\right)\right),\end{aligned}$$

其中 N 为离 x 最近的整数, 当 x 为半奇数时取 $N=x-1/2$, $\|x\|=|x-N|$. 在上式中取 $a(n)=U(n)$, $s_0=0$, $b=3$, $T=x^{3/2}$, $H(x)=x$, $B(s)=\zeta(s-1)$, 则有

$$\sum_{n\leqslant x}U(n)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{3-\mathrm{i}T}^{3+\mathrm{i}T}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 $R(s)=\prod\limits_p\left(1-\dfrac{1}{p(p^{s-1}+1)}\right)$.

现在来估计主项

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{3-iT}^{3+iT}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}R(s)\frac{x^s}{s}ds.$$

将积分限从 $3\pm iT$ 移到 $\frac{3}{2}\pm iT$, 此时函数 $\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}R(s)\frac{x^s}{s}$ 在 $s=2$ 处有一个一阶极点, 留数为 $\frac{R(2)x^2}{2}$, 即

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{3-iT}^{3+iT}+\int_{3+iT}^{\frac{3}{2}+iT}+\int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{3}{2}-iT}+\int_{\frac{3}{2}-iT}^{3-iT}\right)\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}R(s)\frac{x^s}{s}ds$$
$$=\frac{R(2)x^2}{2}.$$

取 $T=x^{\frac{3}{2}}$, 容易估计

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{3+iT}^{\frac{3}{2}+iT}+\int_{\frac{3}{2}-iT}^{3-iT}\right)\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}R(s)\frac{x^s}{s}ds\right|\ll\frac{x^3}{T}=x^{\frac{3}{2}}$$

和

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{3}{2}-iT}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}R(s)\frac{x^s}{s}ds\right|\ll x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}.$$

由于 $R(1)=\prod\limits_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)$, 所以

$$\sum_{n\leqslant x}U(n)=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

于是完成了引理 2.3.1 的证明.

引理 2.3.2 对任意的实数 $x\geqslant 1$, 有

$$\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x\\ \alpha>p}}p\alpha\ll\ln^4 x.$$

证明 因为 $\alpha>p$, 所以 $p^p<p^\alpha\leqslant x$, 那么

$$p<\frac{\ln x}{\ln p}<\ln x.$$

又因为 $p^\alpha\leqslant x$, 则

$$\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln p}\leqslant\frac{\ln x}{\ln 2}.$$

因此

$$\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x\\ \alpha>p}} p\alpha \ll \sum_{p\leqslant \ln x} p \sum_{\alpha\leqslant \frac{\ln x}{\ln 2}} \alpha \ll \ln^2 x \sum_{p\leqslant \ln x} p.$$

$$\sum_{p\leqslant \ln x} p \ll \sum_{p\leqslant \ln x} \ln x \ll \ln^2 x,$$

从而

$$\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x\\ \alpha>p}} p\alpha \ll \ln^4 x.$$

于是完成了引理 2.3.2 的证明.

引理 2.3.3　*对任意的实数 $x\geqslant 1$, 有*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \mathrm{SP}(n)>U(n)}} \mathrm{SP}(n) \ll x\ln^4 x.$$

证明　设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 则 $U(n)=p_1p_2\cdots p_r$, 且 $U(n)|\mathrm{SP}(n)$. 因为 $\mathrm{SP}(n)>U(n)$, 所以至少存在一个素数 $p_i(1\leqslant i\leqslant r)$, 它的次数 α_i 满足 $\alpha_i>p_1p_2\cdots p_r$. 令 $\alpha=\max\{\alpha_i\}(i=1,2,\cdots,r)$, p 表示 α 所对应的最大的素数, 那么根据 $\mathrm{SP}(n)$ 的定义易知

$$\mathrm{SP}(n)<p\alpha,$$

有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \mathrm{SP}(n)>U(n)}} \mathrm{SP}(n) < \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \mathrm{SP}(n)>U(n)}} p\alpha = \sum_{\substack{np^\alpha\leqslant x\\ (n,p^\alpha)=1\\ \alpha>pU(n)}} \ll \sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x\\ \alpha>p}} p\alpha.$$

由引理 2.3.2 可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \mathrm{SP}(n)>U(n)}} \mathrm{SP}(n) \ll \sum_{n\leqslant x}\ln^4 x = x\ln^4 x.$$

于是完成了引理 2.3.3 的证明.

由上面的引理来证明下面这几个定理:

定理 2.3.1　*对任意的实数 $x\geqslant 1$, 有渐近公式*

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{SP}(n)=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 是任意给定的正数.

证明 注意到 $\mathrm{SP}(n) \geqslant U(n)$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{SP}(n)-\sum_{n\leqslant x}U(n)&=\sum_{n\leqslant x}(\mathrm{SP}(n)-U(n))\\&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \mathrm{SP}(n)>U(n)}}(\mathrm{SP}(n)-U(n))\\&\ll\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \mathrm{SP}(n)>U(n)}}\mathrm{SP}(n).\end{aligned}$$

此时由引理 2.3.3, 有

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{SP}(n)-\sum_{n\leqslant x}U(n)\ll x\ln^4 x$$

或

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{SP}(n)=\sum_{n\leqslant x}U(n)+O(x\ln^4 x).$$

再由引理 2.3.1, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{SP}(n)&=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)+O(x\ln^4 x)\\&=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

于是完成了定理 2.3.1 的证明.

利用同样的方法还可得到下面两个定理:

定理 2.3.2 对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(\mathrm{SP}(n))=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{2}{p(p+1)}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 是任意给定的正数.

定理 2.3.3 对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}d(\mathrm{SP}(n))=\frac{6x\ln x}{\pi^2}+\left(\frac{12\gamma-6}{\pi^2}-\frac{72\zeta'(2)}{\pi^4}\right)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 是任意给定的正数.

2.4 Smarandache 函数和 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 的均值

著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 和 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 的乘积有一个有趣的均值性质, 表现为

定理 2.4.1　设 k 是任意的正整数, 则对任意的实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)S(n)=x^2\sum_{i=0}^{k}\frac{c_ix^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=0,1,2,\cdots,k)$ 是常数, 且 $c_0=1$.

证明　事实上由函数 $\Lambda(n)$ 的定义

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)S(n)&=\sum_{\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln 2}}\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}\Lambda(p^\alpha)S(p^\alpha)=\sum_{\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln 2}}\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}\ln pS(p^\alpha)\\&=\sum_{p\leqslant x}p\ln p+\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln 2}}\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}\ln pS(p^\alpha).\end{aligned}$$

对任意的正整数 k, 由素数定理有

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=x\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是常数, 且 $a_1=1$.

由 Abel 恒等式

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x}p\ln p&=\pi(x)x\ln x-\int_2^x\pi(y)(\ln y+1)\mathrm{d}y\\&=x\ln x\,x\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)\right)\\&\quad-\int_2^x\left(y\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right)(\ln y+1)\mathrm{d}y\\&=x^2\sum_{i=0}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}\tag{2-1}$$

其中 $c_i(i=0,1,2,\cdots,k)$ 是常数, 且 $c_0=1$.

另一方面, 利用估计式

$$S(p^\alpha)\ll\alpha\cdot\ln p,$$

有

$$\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln 2}}\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}\ln pS(p^\alpha)\ll\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln 2}}\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}\ln p\cdot\alpha\cdot\ln p\ll x\cdot\ln^2 x. \tag{2-2}$$

结合式 (2-1)、式 (2-2) 可得

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)S(n)=x^2\sum_{i=0}^{k}\frac{c_i x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right).$$

于是完成了定理 2.4.1 的证明.

2.5 可乘函数 $V_m(n)$ 的均值

定义 2.5.1 对任意的正整数 n, 函数 $V_m(n)$ 的定义:

(1) 对任意的素数 p 及正整数 α,

$$V_m(1)=1,\quad V_m(p^\alpha)=p^{\alpha+m}.$$

(2) 正整数 n 的标准素因数分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,

$$V_m(n)=V_m(p_1^{\alpha_1})\cdots V_m(p_k^{\alpha_k}).$$

显然函数 $V_m(n)$ 是可乘函数, 但不是完全可乘函数. 本节的主要目的是研究 $V_m(n)$ 的均值性质.

定理 2.5.1 对任意的实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}V_m(n)=\frac{6\zeta(m+1)}{\pi^2(m+2)}x^{m+2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^m(p+1)}\right)+O\left(x^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 是任意给定的正数.

证明 定义 Dirichlet 级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_m(n)}{n^s},$$

由 Euler 乘积公式得

$$\begin{aligned}f(s)&=\prod_p\left(1+\frac{V_m(p)}{p^s}+\frac{V_m(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{V_m(p^n)}{p^{ns}}+\cdots\right)\\&=\prod_p\left(1+\frac{p^{1+m}}{p^s}+\frac{p^{2+m}}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^{n+m}}{p^{ns}}+\cdots\right)\end{aligned}$$

$$
=\prod_{p}\frac{1-\dfrac{1}{p^{s-1}}+\frac{p^m}{p^{s-1}}}{1-\dfrac{1}{p^{s-1}}}
$$

$$
=\frac{\zeta(s-1)\zeta(s-m-1)}{\zeta(2(s-m-1))}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s-1}+p^m}\right).
$$

这样函数 $f(s)\dfrac{x^s}{s}$ 在 $s=m+2$ 处有一阶极点, 留数为

$$
\frac{6\zeta(m+1)}{\pi^2(m+2)}x^{m+2}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{(p+1)p^m}\right).
$$

在 Perron 公式中取 $b=m+\dfrac{5}{2}$, $T>2$, 则

$$
\sum_{n\leqslant x}V_m(n)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{m+\frac{5}{2}-\mathrm{i}T}^{m+\frac{5}{2}+\mathrm{i}T}f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^{m+\frac{5}{2}}}{T}\right),
$$

将上式积分限移至 $\mathrm{Re}(s)=m+\dfrac{3}{2}+\varepsilon$ 处, 且取 $T=x$ 可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}V_m(n)=&\frac{6\zeta(m+1)}{\pi^2(m+2)}x^{m+2}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{(p+1)p^m}\right)\\
&+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{m+\frac{5}{2}+\varepsilon-\mathrm{i}T}^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon+\mathrm{i}T}f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^{m+\frac{3}{2}}+\varepsilon}{T}\right)\\
=&\frac{6\zeta(m+1)}{\pi^2(m+2)}x^{m+2}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{(p+1)p^m}\right)\\
&+O\left(\int_{-T}^{T}\left|m+\frac{3}{2}+\varepsilon+\mathrm{i}t\right|\frac{x^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon}}{1+|t|}\mathrm{d}t\right)\\
=&\frac{6\zeta(m+1)}{\pi^2(m+2)}x^{m+2}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{(p+1)p^m}\right)+O\left(x^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).
\end{aligned}
$$

于是完成了定理 2.5.1 的证明.

注意到 $m=0$ 时, $V_0(n)=n$, $\lim\limits_{m\to0^+}m\zeta(m+1)=1$ 以及

$$
\sum_{n\leqslant x}V_0(n)=\frac{1}{2}x^2+O(x),
$$

由上面的定理可得到下面的极限式:

推论 2.5.1

$$
\lim_{m\to0^+}\frac{1}{m}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{(p+1)p^m}\right)=\frac{\pi^2}{6}.
$$

2.6 函数 $\delta_k(n)$ 的混合均值

定义 2.6.1 对任意固定的正整数 k, $\delta_k(n)$ 表示能被 n 整除并且与 k 互素的最大正整数, 即

$$\delta_k(n) = \max\{d|\ d|n, (d,k)=1\}.$$

$\delta_k(n)$ 是一个完全可乘函数. 事实上, 对于任意正整数 a_1 和 a_2, 有

$$\delta_k(a_1a_2) = \delta_k(a_1)\delta_k(a_2).$$

另外, 对于任意固定的正整数 m 和 n, 设函数 (m,n) 为 m 和 n 的最大公约数, 函数 $[m,n]$ 为 m 和 n 的最小公倍数. 显然, 它们均为可乘函数.

这一部分内容旨在研究函数 $\delta_k(n)$ 对补数数列 $a_m(n)$、最大公约数 (m,n) 和最小公倍数 $[m,n]$ 的性质, 即用解析方法研究复合函数 $\delta_k(a_m(n))$, $\delta_k((m,n))$ 和 $\delta_k\left(\dfrac{[m,n]}{m}\right)$ 的均值性质.

定理 2.6.1 对任意实数 $x\geqslant 1$ 及给定的正整数 $k\geqslant 1$ 和 $m>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k(a_m(n)) = \frac{6}{\pi^2}\zeta(m^2)R(m)\frac{x^m}{m} + O\left(x^{m-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 $R(m) = \prod\limits_{p|k}\dfrac{p^{1+m-m^2}(p^{m^2}-1)}{(p^m-1)(p+1)}\prod\limits_{p\nmid k}\left(1+\dfrac{p^{m^2-1}-p^{m+1}}{(p^{m+1}-1)(p+1)p^{m^2-1}}\right)$, ε 是任意给定的正数.

证明 对任意复数 s (Re $(s)>1$), 定义 Dirichlet 级数

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_k(a_m(n))}{n^s}.$$

由 Euler 乘积公式可得

$$\begin{aligned}
f(s) =& \prod_p\left(1+\frac{\delta_k(a_m(p))}{p^s}+\frac{\delta_k(a_m(p^2))}{p^{2s}}+\frac{\delta_k(a_m(p^3))}{p^{3s}}+\cdots\right)\\
=& \prod_{p|k}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{p^{m-1}}{p^s}+\frac{p^{m-2}}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p}{p^{(m-1)s}}+\frac{1}{p^{ms}}+\frac{p^{m-1}}{p^{(m+1)s}}+\cdots\right)\\
=& \prod_{p|k}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}\prod_{p\nmid k}\left[\left(1+\frac{p^{m-1}}{p^s}+\cdots+\frac{p}{p^{(m-1)s}}\right)\times\left(1+\frac{1}{p^{ms}}+\frac{1}{p^{2ms}}+\cdots\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\prod_{p|k}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}\prod_{p\nmid k}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^{ms}}}\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{p^{m-1}}{p^s}+\cdots+\frac{p}{p^{(m-1)s}}\right)\\
&=\prod_{p|k}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}\prod_{p}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^{ms}}}\prod_{p|k}\left(1-\frac{1}{p^{ms}}\right)\times\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{p^{m-1}}{p^s}+\cdots+\frac{p}{p^{(m-1)s}}\right)\\
&=\zeta(ms)\prod_{p|k}\frac{p^s}{p^s-1}\left(1-\frac{1}{p^{ms}}\right)\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{p^{m-1}}{p^s}+\cdots+\frac{p}{p^{(m-1)s}}\right).
\end{aligned}
$$

为了方便起见, 设

$$
A=\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{p^{m-1}}{p^s}+\cdots+\frac{p}{p^{(m-1)s}}\right),
$$

那么利用等比数列求和公式可得

$$
\begin{aligned}
A&=\prod_{p\nmid k}\left[1+\frac{p^m}{p^{s+1}-1}\left(1-\frac{1}{p^{(m-1)(s+1)}}\right)\right]\\
&=\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{1}{p^{s+1-m}}+\frac{p^m}{(p^{s+1}-1)}-\frac{1}{p^{s+1-m}}-\frac{p^m}{(p^{s+1}-1)p^{(m-1)(s+1)}}\right)\\
&=\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{1}{p^{s+1-m}}+\frac{1}{(p^{s+1}-1)p^{s+1-m}}-\frac{p^m}{(p^{s+1}-1)p^{(m-1)(s+1)}}\right)\\
&=\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{1}{p^{s+1-m}}\right)\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{1}{(p^{s+1}-1)(p^{s+1-m}+1)}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{p^{s+1}}{p^{(m-1)(s+1)}(p^{s+1}-1)(p^{s+1-m}+1)}\right)\\
&=\frac{\zeta(s+1-m)}{\zeta(2(s+1-m))}\prod_{p|k}\frac{p^{s+1-m}}{p^{s+1-m}+1}\\
&\quad\times\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{1}{(p^{s+1}-1)(p^{s+1-m}+1)}-\frac{p^{s+1}}{p^{(m-1)(s+1)}(p^{s+1}-1)(p^{s+1-m}+1)}\right).
\end{aligned}
$$

把 A 的结果代入 $f(s)$ 中并进行整理, 可以得到

$$
\begin{aligned}
f(s)=&\zeta(ms)\frac{\zeta(s+1-m)}{\zeta(2(s+1-m))}\prod_{p|k}\frac{p^{2s-ms-m+1}(p^{ms}-1)}{(p^s-1)(p^{s+1-m}+1)}\\
&\times\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{1}{(p^{s+1}-1)(p^{s+1-m}+1)}-\frac{p^{s+1}}{p^{(m-1)(s+1)}(p^{s+1}-1)(p^{s+1-m}+1)}\right)
\end{aligned}
$$

由 $m>1$, 可得 $f(s)\dfrac{x^s}{s}$ 在 $s=m$ 处有一阶极点, 留数为 $\dfrac{\zeta(m^2)}{\zeta(2)}R(m)\dfrac{x^m}{m}$, 其中

$$R(m)=\prod_{p|k}\frac{p^{1+m-m^2}(p^{m^2}-1)}{(p^m-1)(p+1)}\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{p^{m^2-1}-p^{m+1}}{(p^{m+1}-1)(p+1)p^{m^2-1}}\right).$$

应用 Perron 公式, 取 $b=m+\dfrac{1}{2}$, $T>2$, 可得

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k(a_m(n)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{m+\frac{1}{2}-\mathrm{i}T}^{m+\frac{1}{2}+\mathrm{i}T}f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^{m+\frac{1}{2}}}{T}\right).$$

将上式积分限移至 $\mathrm{Re}(s)=m-\dfrac{1}{2}+\varepsilon$ 处, 于是取 $T=x$, 可得到

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant x}\delta_k(a_m(n))\\&=\frac{6}{\pi^2}\zeta(m^2)R(m)\frac{x^m}{m}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{m-\frac{1}{2}+\varepsilon-\mathrm{i}T}^{m-\frac{1}{2}+\varepsilon+\mathrm{i}T}f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{m-\frac{1}{2}+\varepsilon})\\&=\frac{6}{\pi^2}\zeta(m^2)R(m)\frac{x^m}{m}+O\left(\int_{-T}^{T}\left|f(m-\frac{1}{2}+\varepsilon+\mathrm{i}t)\right|\frac{x^{m-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{1+|t|}\mathrm{d}t\right)\\&\quad+O(x^{m-\frac{1}{2}+\varepsilon})\\&=\frac{6}{\pi^2}\zeta(m^2)R(m)\frac{x^m}{m}+O(x^{m-\frac{1}{2}+\varepsilon}).\end{aligned}$$

于是完成了定理 2.6.1 的证明.

特别地, 在定理 2.6.1 中当 $m=2$ 时, 注意到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ 及 $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$, 便有如下推论:

推论 2.6.1 对任意实数 $x\geqslant 1$ 及给定的正整数 $k\geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k(a_2(n))=\frac{\pi^2}{30}x^2\prod_{p|k}\frac{p^2+1}{p(p+1)}+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

定理 2.6.2 设 m 和 k 是两个给定的正整数. 那么对任意实数 $x\geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k((m,n))=x\prod_{\substack{p^\alpha\|m\\(p,k)=1}}\left(\alpha+1+\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 表示任意给定的整数.

证明 对任意复数 s ($\mathrm{Re}\ (s)>1$), 设 Dirichlet 级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_k((m,n))}{n^s}.$$

从 $\delta_k((m,n))$ 的定义和 Euler 乘积公式, 可得到

$$
\begin{aligned}
f(s)=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_k((m,n))}{n^s}\\
=&\prod_p\left(1+\frac{\delta_k((m,p))}{p^s}+\frac{\delta_k((m,p^2))}{p^{2s}}+\cdots\right)\\
=&\prod_{p\nmid m}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)\\
&\times\prod_{p^\alpha\|m}\left(1+\frac{\delta_k(p)}{p^s}+\frac{\delta_k(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{\delta_k(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}+\frac{\delta_k(p^\alpha)}{p^{(\alpha+1)s}}+\cdots\right)\\
=&\zeta(s)\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\prod_{\substack{p^\alpha\|m\\ p|k}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\\
&\times\prod_{\substack{p^\alpha\|m\\ p\nmid k}}\left(1+\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{1}{p^{2(s-1)}}+\cdots+\frac{1}{p^{\alpha(s-1)}}+\frac{p^\alpha}{p^{(\alpha+1)s}}+\frac{p^\alpha}{p^{(\alpha+2)s}}+\cdots\right)\\
=&\zeta(s)\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\prod_{p|(m,k)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\\
&\times\prod_{\substack{p^\alpha\|m\\ (p,k)=1}}\left(\frac{1-\dfrac{1}{p^{(\alpha+1)(s-1)}}}{1-\dfrac{1}{p^{s-1}}}+\frac{p^\alpha}{p^{(\alpha+1)s}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}\right)\\
=&\zeta(s)\prod_{\substack{p^\alpha\|m\\ (p,k)=1}}\left(\frac{1-\dfrac{1}{p^{(\alpha+1)(s-1)}}}{1-\dfrac{1}{p^{s-1}}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)+\frac{p^\alpha}{p^{(\alpha+1)s}}\right).
\end{aligned}
$$

显然, 有不等式

$$
|\delta_k((m,n))|\leqslant n,\qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_k((m,n))}{n^s}\right|\ll\frac{1}{\sigma-1},
$$

这里 $\sigma>1$ 是 s 的实部. 于是根据 Perron 公式, 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\frac{a(n)}{n_0^s}=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}f(s+s_0)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)\\
&+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\ln x}{T}\right)\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{\|x\|}\right)\right),
\end{aligned}
$$

这里 N 为最接近于 x 的整数, $\|x\|=|x-N|$. 取 $s_0=0$, $b=2$, $T=x^{\frac{3}{2}}$, $H(x)=$

x^2, $B(\sigma) = \dfrac{1}{\sigma - 1}$,

$$\sum_{n\leqslant x} \delta_k((m,n)) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{2-\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t} \zeta(s) R(s) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

这里

$$R(s) = \prod_{\substack{p^\alpha \| m \\ (p,k)=1}} \left(\frac{1 - \dfrac{1}{p^{(\alpha+1)(s-1)}}}{1 - \dfrac{1}{p^{s-1}}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) + \frac{p^\alpha}{p^{(\alpha+1)s}} \right).$$

为了估计主项

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{2-\mathrm{i}t}^{2+\mathrm{i}t} \zeta(s) R(s) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s,$$

$s = 2 \pm \mathrm{i}T$ 到 $s = \dfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}T$ 移动积分限. 这时,

$$f(s) = \zeta(s) R(s) \frac{x^s}{s},$$

在 $s = 1$ 处有一阶极点, 留数为 $R(1)x$. 于是有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int_{2-\mathrm{i}T}^{2+\mathrm{i}T} + \int_{2+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{2}+\mathrm{i}T} + \int_{\frac{1}{2}+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{2}-\mathrm{i}T} + \int_{\frac{1}{2}-\mathrm{i}T}^{2-\mathrm{i}T} \right) \zeta(s) R(s) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s = R(1)x.$$

很容易得到估计

$$\left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int_{2+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{2}+\mathrm{i}T} + \int_{\frac{1}{2}-\mathrm{i}T}^{2-\mathrm{i}T} \right) \zeta(s) R(s) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s \right| \ll \frac{x^2}{T} = x^{\frac{1}{2}}$$

和

$$\left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\frac{1}{2}+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{2}-\mathrm{i}T} \zeta(s) R(s) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s \right| \ll \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right) \frac{x^{\frac{1}{2}}}{t+1} \right| \mathrm{d}t \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

结合上述估计, 有

$$\sum_{n\leqslant x} \delta_k((m,n)) = x \prod_{\substack{p^\alpha \| m \\ (p,k)=1}} \left(\alpha + 1 + \frac{1}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

于是完成了定理 2.6.2 的证明.

推论 2.6.2 设 m 是无平方因子数. 那么对任意给定的正整数 k 和任意实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} \delta_k((m,n)) = x \prod_{\substack{p | m \\ (p,k)=1}} \left(2 - \frac{1}{p}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

定理 2.6.3　设 k 和 m 是任意给定的正整数. 那么对任意的实数 $x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} \delta_k\left(\frac{[m,n]}{m}\right) = \frac{x^2}{2}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}\prod_{\substack{p\nmid k\\ p^\alpha \| m}}\frac{p^{2\alpha+1}+1}{p^{2\alpha+1}+p^{2\alpha}} + O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

证明　事实上运用与定理 2.6.1、定理 2.6.2 相同的证明方法来证明定理 2.6.3. 如果 m 为任意给定的正整数, 则

$$\frac{[m,n]}{m} = \frac{mn}{(m,n)m} = \frac{n}{(m,n)}.$$

对任意复数 s, 如果 $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, 定义 Dirichlet 级数

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_k\left(\frac{[m,n]}{m}\right)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_k\left(\dfrac{n}{(m,n)}\right)}{n^s}.$$

从 $\delta_k\left(\dfrac{n}{(m,n)}\right)$ 的定义和 Euler 乘积公式, 有

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p\left(1 + \frac{\delta_k\left(\dfrac{p}{(m,p)}\right)}{p^s} + \frac{\delta_k\left(\dfrac{p^2}{(m,p^2)}\right)}{p^{2s}} + \cdots\right)\\
&= \prod_{p|k}\left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right)\prod_{p\nmid mk}\left(1 + \frac{p}{p^s} + \frac{p^2}{p^{2s}} + \cdots\right)\\
&\quad\times\prod_{\substack{p\nmid k\\ p^\alpha\|m}}\left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{\alpha s}} + \frac{p}{p^{(\alpha+1)s}} + \frac{p^2}{p^{(\alpha+2)s}} + \cdots\right)\\
&= \prod_{p|k}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}\prod_{p\nmid mk}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^{s-1}}}\prod_{\substack{p\nmid k\\ p^\alpha\|m}}\left(\frac{1-\dfrac{1}{p^{(\alpha+1)s}}}{1-\dfrac{1}{p^s}} + \frac{p}{p^{(\alpha+1)s}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^{(s-1)}}}\right)\\
&= \prod_{p|k}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}\prod_{p\nmid k}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^{s-1}}}\prod_{\substack{p\nmid k\\ p^\alpha\|m}}\left(\frac{1-\dfrac{1}{p^{(\alpha+1)s}}}{1-\dfrac{1}{p^s}}\cdot\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right) + \frac{p}{p^{(\alpha+1)s}}\right)\\
&= \zeta(s-1)\prod_{p|k}\frac{1-\dfrac{1}{p^{s-1}}}{1-\dfrac{1}{p^s}}\prod_{\substack{p\nmid k\\ p^\alpha\|m}}\left(\frac{1-\dfrac{1}{p^{(\alpha+1)s}}}{1-\dfrac{1}{p^s}}\cdot\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right) + \frac{p}{p^{(\alpha+1)s}}\right).
\end{aligned}$$

因为 $\zeta(s-1)$ 在 $s=2$ 处有一阶极点, $f(s)\dfrac{x^s}{s}$ 在 $s=2$ 处也有一阶极点, 留数为

$$\frac{x^2}{2}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}\prod_{\substack{p\nmid k\\ p^{\alpha}||m}}\frac{p^{2\alpha+1}+1}{p^{2\alpha+1}+p^{2\alpha}}.$$

根据 Perron 公式, 取 $s_0=0$, $b=\dfrac{5}{2}$, $T=x$, 有

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k((m,n))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{5}{2}-iT}^{\frac{5}{2}+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{T}\right).$$

现在将积分限从 $s=\dfrac{5}{2}\pm iT$ 移动到 $s=\dfrac{3}{2}+\varepsilon\pm iT$, 取 $T=x$, 可得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leqslant x}\delta_k\left(\frac{[m,n]}{m}\right)=\sum_{n\leqslant x}\delta_k\left(\frac{n}{(m,n)}\right)\\
=&\frac{x^2}{2}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}\prod_{\substack{p\nmid k\\ p^{\alpha}||m}}\frac{p^{2\alpha+1}+1}{p^{2\alpha+1}+p^{2\alpha}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{3}{2}+\varepsilon+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)\\
=&\frac{x^2}{2}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}\prod_{\substack{p\nmid k\\ p^{\alpha}||m}}\frac{p^{2\alpha+1}+1}{p^{2\alpha+1}+p^{2\alpha}}+O\left(\int_{-T}^{T}\left|f\left(\frac{3}{2}+\varepsilon+it\right)\right|\frac{x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}{1+|t|}dt\right)\\
&+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)\\
=&\frac{x^2}{2}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}\prod_{\substack{p\nmid k\\ p^{\alpha}||m}}\frac{p^{2\alpha+1}+1}{p^{2\alpha+1}+p^{2\alpha}}+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

于是完成了定理 2.6.3 的证明.

推论 2.6.3 设 m 是无平方因子数. 那么对任意正整数 k 和任意实数 $x\geqslant 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k\left(\frac{[m,n]}{m}\right)=\frac{x^2}{2}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}\prod_{\substack{p\nmid k\\ p|m}}\frac{p^3+1}{p^3+p^2}+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

2.7 可乘函数在方程解中的均值

定义 2.7.1 n 的无 m 次幂因子数的定义为: 如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}\cdots p_q^{\alpha_q}$, 其中 $\alpha_i<m(i=1,2,3,\cdots,s)$, $a_j\geqslant m(j=s+1,\cdots,q)$, 则 $b_m(n)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$.

函数 $b_m(n)$ 和函数 $\delta_k(n)$ 都是可乘函数. $\mathcal{A}$ 表示方程 $\delta_k(n)=b_m(n)$ 解的集合.

定理 2.7.1 对任意的复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>1$, 有恒等式

$$\sum_{n\in\mathcal{A}}\frac{1}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(ms)}\prod_{p|k}\frac{p^{ms}-p^{(m-1)s}+1}{p^{ms}-1}.$$

证明 令正整数 $n=n_1u=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}\cdots p_q^{\alpha_q}$, 其中 $n_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 不包含 n 的 m 次幂因子. $u=p_{s+1}^{\alpha_{s+1}}\cdots p_q^{\alpha_q}$ 是完全 m 次方数. 显然 $\alpha_i<m(i=1,2,\cdots,s)$ 和 $\alpha_j\geqslant m$ $(j=s+1,\cdots,q)$. 由于这两个函数都是可乘的, 所以

$$\delta_k(n)=\delta_k(n_1)\delta_k(u),$$

$$b_m(n)=b_m(n_1)b_m(u)=n_1,$$

因此方程 $\delta_k(n)=b_m(n)$ 解等价于等式 $\delta_k(n_1)\delta_k(u)=n_1$.

注意到, 如果 $\alpha_j\geqslant m$, $p_j|k(j=s+1,\cdots,q)$, 则 $\delta_k(u)=1$; 如果 $\alpha_i<m$, $p_i\nmid k(i=1,2,\cdots,s)$, 则 $\delta_k(n_1)=n_1$. 这表明方程 $\delta_k(n_1)\delta_k(u)=n_1$ 是存在的.

定义数论函数

$$b(n)=\begin{cases}1, & n>1 \text{ 是方程 } \delta_k(n)=b_m(n) \text{ 的解},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则

$$\sum_{n\in\mathcal{A}}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}.$$

$b(n)$ 也是可乘函数, 因此由 Euler 乘积公式则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}=&\prod_{p}\left(1+\frac{b(p)}{p^s}+\frac{b(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right)\\ =&\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots+\frac{1}{p^{(m-1)s}}\right)\\ &\times\prod_{p|k}\left(1+\frac{1}{p^{ms}}+\frac{1}{p^{(m+1)s}}+\cdots\right)\\ =&\prod_{p\nmid k}\frac{1-\frac{1}{p^{ms}}}{1-\frac{1}{p^s}}\prod_{p|k}\left(1+\frac{1}{p^{ms}}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}\right)\end{aligned}$$

$$=\prod_{p}\frac{1-\dfrac{1}{p^{ms}}}{1-\dfrac{1}{p^{s}}}\prod_{p|k}\frac{1-\dfrac{1}{p^{s}}}{1-\dfrac{1}{p^{ms}}}\left(1+\frac{1}{p^{ms}}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^{s}}}\right)$$
$$=\frac{\zeta(s)}{\zeta(ms)}\prod_{p|k}\frac{p^{ms}-p^{(m-1)s}+1}{p^{ms}-1}.$$

于是完成了定理 2.7.1 的证明.

定理 2.7.2 对任意的实数 $x\geqslant 1$ 和正整数 $m\geqslant 2$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\mathcal{A}}}1=\frac{1}{\zeta(m)}x\prod_{p|k}\frac{p^{m}-p^{m-1}+1}{p^{m}-1}+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 是任意小的正数.

证明 由 $b(n)$ 的定义, 显然有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\mathcal{A}}}1=\sum_{n\leqslant x}b(n),$$

定义 Dirichlet 级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^{s}}.$$

由定理 2.7.1 有

$$f(s)=\frac{\zeta(s)}{\zeta(ms)}\prod_{p|k}\frac{p^{ms}-p^{(m-1)s}+1}{p^{ms}-1},$$

因为

$$|b(n)|\leqslant 1,\qquad\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^{\sigma}}\right|\leqslant\zeta(\sigma),$$

$\sigma>1$ 是 s 的实部. 因此在 Perron 公式中取 $s_0=0$, $b=2$, $T=x^{\frac{3}{2}}$, $H(x)=1$, $B(\sigma)=\zeta(\sigma)$, 则有

$$\sum_{n\leqslant x}b(n)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}\frac{\zeta(s)}{\zeta(ms)}R(s)\frac{x^{s}}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中

$$R(s)=\prod_{p|k}\frac{p^{ms}-p^{(m-1)s}+1}{p^{ms}-1}.$$

为了估计主项, 把积分限从 $s=2\pm\mathrm{i}T$ 移到 $s=\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}T$, 这样函数 $\frac{\zeta(s)}{\zeta(ms)}R(s)\frac{x^{s}}{s}$ 在

$s=1$ 处有一个单极点, 且函数在该点的留数为 $\dfrac{R(1)}{\zeta(m)}x$. 根据留数定理

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{2-\mathrm{i}T}^{2+\mathrm{i}T}+\int_{2+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{2}+\mathrm{i}T}+\int_{\frac{1}{2}+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{2}-\mathrm{i}T}+\int_{\frac{1}{2}-\mathrm{i}T}^{2-\mathrm{i}T}\right)\frac{\zeta(s)}{\zeta(ms)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s=\frac{R(1)}{\zeta(m)}x,$$

容易有估计式

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{2+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{2}+\mathrm{i}T}+\int_{\frac{1}{2}-\mathrm{i}T}^{2-\mathrm{i}T}\right)\frac{\zeta(s)}{\zeta(ms)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\ll\frac{x^2}{T}=x^{\frac{1}{2}}$$

和

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\frac{1}{2}+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{2}-\mathrm{i}T}\frac{\zeta(s)}{\zeta(ms)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

因此

$$\sum_{n\leqslant x}b(n)=\frac{1}{\zeta(m)}x\prod_{p|k}\frac{p^m-p^{m-1}+1}{p^m-1}+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

即

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\mathcal{A}}}1=\frac{1}{\zeta(m)}x\prod_{p|k}\frac{p^m-p^{m-1}+1}{p^m-1}+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

于是完成了定理 2.7.2 的证明.

2.8 Smarandache 可乘函数的均值

Smarandache 可乘函数 $\mathrm{SM}(n)$ 的定义为

定义 2.8.1　对于任意正整数 n, 如果

$$\mathrm{SM}(ab)=\max(\mathrm{SM}(a),\mathrm{SM}(b)),\quad (a,b)=1.$$

称 $\mathrm{SM}(n)$ 为 Smarandache 可乘函数.

对于任意素数 p 和任意正整数 α, 令 $\mathrm{SM}(p^\alpha)=\alpha p$, 并且如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准素因数分解式, 那么

$$\mathrm{SM}(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{\mathrm{SM}(p_i^{\alpha_i})\}=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_i p_i\}.$$

Smarandache 可乘函数 $\mathrm{SM}(n)$ 与 Smarandache 函数 $S(n)$ 有很多相似的性质.

定理 2.8.1　对于任意实数 $x\geqslant 2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{SM}(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

为了完成定理的证明, 需要一个简单的引理. 方便起见, 设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准素因数分解式, $P(n)$ 为 n 的最大素因子, 也就是, $P(n) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \{p_i\}$. 那么有

引理 2.8.1 对任意正整数 n, 如果存在 $P(n)$ 使得 $P(n) > \sqrt{n}$, 则有恒等式

$$\mathrm{SM}(n) = P(n).$$

证明 由 $P(n)$ 的定义和条件 $P(n) > \sqrt{n}$, 可得

$$\mathrm{SM}(P(n)) = P(n). \tag{2-3}$$

对 n $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的其他素因子 p_i, 有

$$\mathrm{SM}(p_i^{\alpha_i}) = \alpha_i p_i.$$

现在分三种情形讨论 $f(p_i^{\alpha_i})$ 的上界:

(1) 如果 $\alpha_i = 1$, 那么 $\mathrm{SM}(p_i) = p_i \leqslant \sqrt{n}$;

(2) 如果 $\alpha_i = 2$, 那么 $\mathrm{SM}(p_i^2) = 2p_i \leqslant 2 \cdot n^{\frac{1}{4}} \leqslant \sqrt{n}$;

(3) 如果 $\alpha_i \geqslant 3$, 那么 $\mathrm{SM}(p_i^{\alpha_i}) = \alpha_i \cdot p_i \leqslant \alpha_i \cdot n^{\frac{1}{2\alpha_i}} \leqslant n^{\frac{1}{2\alpha_i}} \cdot \dfrac{\ln n}{\ln p_i} \leqslant \sqrt{n}$. 这里应用了: 当 $p^\alpha | n$ 时, $\alpha \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln p}$.

结合 (1) $\sim$ (3), 易得

$$\mathrm{SM}(p_i^{\alpha_i}) \leqslant \sqrt{n}. \tag{2-4}$$

由式 (2-3) 和式 (2-4), 有

$$\mathrm{SM}(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{\mathrm{SM}(p_i^{\alpha_i})\} = \mathrm{SM}(P(n)) = P(n).$$

于是完成了引理 2.8.1 的证明.

利用上述引理, 用初等的方法来完成定理 2.8.1 的证明.

首先定义如下的两个集合 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} = \{n | n \leqslant x, P(n) \leqslant \sqrt{n}\}, \quad \mathcal{B} = \{n | n \leqslant x, P(n) > \sqrt{n}\}.$$

由 Euler 求和公式, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathcal{A}} \mathrm{SM}(n) &\ll \sum_{n \leqslant x} \sqrt{n} \ln n \\ &= \int_1^x \sqrt{t} \ln t \mathrm{d}t + \int_1^x (t - [t])(\sqrt{t} \ln t)' \mathrm{d}t + \sqrt{x} \ln x (x - [x]) \\ &\ll x^{\frac{3}{2}} \ln x.\end{aligned} \tag{2-5}$$

类似地, 由 Abel 恒等式有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathcal{B}}\mathrm{SM}(n)&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)>\sqrt{n}}}P(n)=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n\leqslant p\leqslant\frac{x}{n}}p\\&=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{\sqrt{x}\leqslant p\leqslant\frac{x}{n}}p+O\left(\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n\leqslant p\leqslant\frac{x}{n}}\sqrt{x}\right)\\&=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x}{n}\pi\left(\frac{x}{n}\right)-\sqrt{x}\pi(\sqrt{x})-\int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{n}}\pi(s)\mathrm{d}s\right)\\&\quad+O\left(x^{\frac{3}{2}}\ln x\right),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{x}\leqslant p\leqslant\frac{x}{n}}p&=\frac{x}{n}\pi\left(\frac{x}{n}\right)-\sqrt{x}\pi(\sqrt{x})-\int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{n}}\pi(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{n^2\ln\dfrac{x}{n}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\ln\sqrt{x}}+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^2\frac{x}{n}}\right)\\&\quad+O\left(\frac{x}{\ln^2\sqrt{x}}\right)+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^2\frac{x}{n}}-\frac{x}{\ln^2\sqrt{x}}\right).\end{aligned}\tag{2-6}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{x^2}{n^2\ln\frac{x}{n}}&=\sum_{n\leqslant\ln^2x}\frac{x^2}{n^2\ln\frac{x}{n}}+O\left(\sum_{\ln^2x\leqslant n\leqslant\sqrt{x}}\frac{x^2}{n^2\ln x}\right)\\&=\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2x}\right)\end{aligned}\tag{2-7}$$

和

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{x^2}{n^2\ln^2\dfrac{x}{n}}=O\left(\frac{x^2}{\ln^2x}\right).\tag{2-8}$$

结合式 (2-5)~ 式 (2-8), 即有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{SM}(n)&=\sum_{n\in\mathcal{A}}\mathrm{SM}(n)+\sum_{n\in\mathcal{B}}\mathrm{SM}(n)\\&=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2x}\right).\end{aligned}$$

于是完成了定理 2.8.1 的证明.

2.9 Smarandache 函数 $S(n)$ 和 Smarandache 可乘函数 SM(n) 的均值

令 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, 则易知 $S(n) \geqslant P(n)$. Erdös 指出, 对大多数 n, $S(n)=P(n)$. 这就意味着 $N(x)=O(x)$, 这里 $N(x)$ 表示满足 $n \leqslant x$ 和 $S(n) \neq P(n)$ 的自然数的个数, $x>3$ 为实数. 从 $S(n)$ 的定义还可以得到如下的事实: 令 p 为素数, 则 $S(p)=p$, 如果 $n \neq 4$ 且 $n \neq p$, 则 $S(n)<n$. 由以上两个简单的性质, 可以得到 $S(n)$ 和 $\pi(x)$ 的一个关系式:

$$\pi(x)=-1+\sum_{n=2}^{[x]}\left[\frac{S(n)}{n}\right].$$

本节讨论 $S(n)$, SM(n) 和 $P(n)$ 之间的关系及 $S(n)$, SM(n) 值的分布性质.

引理 2.9.1

(1) 如果 $P(n)>\sqrt{n}$, 则 $S(n)=\mathrm{SM}(n)=P(n)$;

(2) 如果 $n=mp_1P(n)$ 且 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n) \leqslant \sqrt{n}$, 则 $S(n)=\mathrm{SM}(n)=P(n)$;

(3) 如果 $n=mP^2(n)$ 且 $n^{\frac{1}{3}}<P(n) \leqslant \sqrt{n}$, 则 $S(n)=\mathrm{SM}(n)=2P(n)$.

证明 只证明有关 $S(n)$ 的结果, 关于 SM(n) 的结果可以类似证明.

(1) 令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}P(n)$, 则 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}<\sqrt{n}<P(n)$, 那么 $p_i^{\alpha_i}|P(n)!$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$, 所以 $n|(P(n))!$, 但是 $P(n)\nmid(P(n)-1)!$, 故 $S(n)=P(n)$.

(2) 根据 $m<n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)$, 应用同样的方法可以证明 $S(n)=P(n)$.

(3) 如果 $n=mP^2(n)$ 且 $n^{\frac{1}{3}}<P(n) \leqslant \sqrt{n}$, 那么 $m<P^2(n)$. 由于 $P^2(n)|(2P(n))!$, 所以 $m|(2P(n))!$. 而 $P^2(n)\nmid(2P(n)-1)!$, 故 $S(n)=2P(n)$.

引理 2.9.2 对任意的实数 $x \geqslant 3$, 有

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ P(n) \leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(S(n)-P(n))^2 \ll x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x$$

和

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ P(n) \leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(\mathrm{SM}(n)-P(n))^2 \ll x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x.$$

证明 令 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$, 则有 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\} \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_i p_i\}$. 令 $\alpha p=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_i p_i\}$, 则 $S(n) \ll p\ln p$. 注意到, 如果 $\alpha=1$, 那么 $p=P(n)$, 故 $S(n)-P(n)=0$, 有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(S(n)-P(n))^2\ll\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}},p^2|n}}p^2\ln^2 n=\sum_{\substack{np^2\leqslant x\\ p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}}p^2\ln^2 x$$

$$=\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}p^2\sum_{n\leqslant\frac{x}{p^2}}\ln^2 x\ll\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}x\ln^2 x\ll x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x.$$

同样有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(\mathrm{SM}(n)-P(n))^2\ll x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x.$$

引理 2.9.3 令 p 为素数且 $m\leqslant x^{\frac{1}{3}}$, 有

$$\sum_{m\leqslant p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^2=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}}\right).$$

证明 由 Abel 恒等式, 有

$$\sum_{m\leqslant p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^2=\pi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\frac{x}{m}-\pi(m)m^2-2\int_m^{\sqrt{\frac{x}{m}}}\pi(t)t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}-\frac{2}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}}\right)$$

$$=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}}\right).$$

于是完成了引理 2.9.3 的证明.

定理 2.9.1 对任意的实数 $x\geqslant 3$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

由这个定理不难看出, Erdös 的断言不仅是正确的, 而且存在 $S(n)-P(n)$ 的一个有趣的均方值公式.

证明 从引理 2.9.1(2) 知如果 $P(n)>\sqrt{n}$, 则 $S(n)-P(n)=0$. 所以结合引理

2.9.1 和引理 2.9.2, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2\\
&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)>\sqrt{n}}}(S(n)-P(n))^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(n)-P(n))^2\\
&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(n)-P(n))^2\\
&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(S(n)-P(n))^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(n)-P(n))^2\\
&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(n)-P(n))^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right).
\end{aligned}$$

注意到当 $n^{\frac{1}{3}}<p(n)\leqslant\sqrt{n}$ 时, n 只有如下几种情况:

(1) $n=mP^2(n)$;

(2) $n=mp_1P(n)$, 其中 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)$;

(3) $n=mP(n)$, 且 $P(m)\leqslant n^{\frac{1}{3}}$.

对于第 (3) 种情况, 如果 $S(n)=P(n)$, 则和式为零; 如果 $S(n)\neq P(n)$, 则必存在 $p^{\alpha}|m$, $\alpha\geqslant 2$ 且 $\alpha p>P(n)$, 那么必有 $p<n^{\frac{1}{3}}$. 估计第 (3) 种情况下和式的阶不超过 $x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x$, 所以由引理 2.9.1(3), 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(n)-P(n))^2\\
&=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{mp^2}}}(S(mp^2)-P(mp^2))^2\\
&\quad+\sum_{\substack{mp_1p_2\leqslant x\\ (mp_1p_2)^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\leqslant\sqrt{mp_1p_2}}}(S(mp_1p_2)-P(mp_1p_2))^2+O(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x)\\
&=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{mp^2}}}p^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right)\\
&=\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<p^2\leqslant\frac{x}{m}}p^2+O(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x).
\end{aligned}$$

由引理 2.9.3, 可得

$$\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<p^2\leqslant\frac{x}{m}}p^2$$

$$=\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}}\right)\right)$$

$$=\frac{2x^32}{3\ln x}\sum_{m\leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}}\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}+\left(\sum_{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}<m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln\frac{x}{m}}\right)+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

$$=\frac{2\zeta\left(\dfrac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

结合上述几个式子, 可得渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\dfrac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

于是完成了定理 2.9.1 的证明.

利用同样的方法还可以证明:

定理 2.9.2　对任意的实数 $x\geqslant 3$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(\mathrm{SM}(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\dfrac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

从证明的过程可以看出, 在绝大多数情况下 $S(n)$ 和 $\mathrm{SM}(n)$ 是相等的.

第 3 章　包含数论函数的方程及求解

方程的整数解是数论中一个重要的研究课题, 也是一个复杂的课题, 世界上许多伟大的数学家都在这一领域做出过出色的工作, 至今仍是现代数论和现代代数几何的推动力和源泉. 为了研究一些方程的整数解, 人们创造了许多有力的方法和工具, 但是仍有很多问题没有解决. 这里, 仅选择一些特殊方程的整数解问题进行讨论, 来展示特殊方程整数解研究过程中的一般方法和技巧.

3.1　关于 Smarandache 函数的方程

给出几个关于 Smarandache 函数的方程并用初等方法来求解.

引理 3.1.1　对任意正整数 m 和任意实数 x, 存在与 x 无关的正整数 $a_1^{(m)}$, $a_2^{(m)}$, $\cdots$, $a_m^{(m)}$, 满足

$$\begin{aligned}x^m =& (x-1)(x-2)\cdots(x-m)\\&+\sum_{l=1}^{m-1} a_l^{(m)}(x-1)(x-2)\cdots(x-m+l)+a_m^{(m)}.\end{aligned}$$

证明　应用数学归纳法进行证明.

(1) 显然当 $m=1$ 时结论是成立的, 对任意实数 x, 均有 $x=(x-1)+1$, 因此

$$a_1^{(1)}=1.$$

(2) 假设当 $m=k(k\geqslant 1)$ 时结论成立, 则当 $m=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}x^{k+1} =& (x-1)(x-2)\cdots(x-k)+\sum_{l=1}^{k-1} a_l^{(k)}(x-1)(x-2)\cdots(x-k+l)+a_k^{(k)}x\\ =& (x-1)(x-2)\cdots(x-k-1)+(k+1)(x-1)(x-2)\cdots(x-k)\\&+\sum_{l=1}^{k-1} a_l^{(k)}(x-1)(x-2)\cdots(x-k+l-1)\\&+\sum_{l=1}^{k-1} a_l^{(k)}(k-l+1)(x-1)(x-2)\cdots(x-k+l)+a_k^{(k)}(x-1)+a_k^{(k)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x-1)(x-2)\cdots(x-k-1) + (k+1+a_1^{(k)})(x-1)(x-2)\cdots(x-k) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k-2} a_{l+1}^{(k)}(k-l+1)(x-1)(x-2)\cdots(x-k+l) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k-2} a_l^{(k)}(k-l+1)(x-1)(x-2)\cdots(x-k+l) \\
&\quad + (2a_{k-1}^{(k)} + a_k^{(k)})(x-1) + a_k^{(k)} \\
&= (x-1)(x-2)\cdots(x-k-1) + (k+1+a_1^{(k)})(x-1)(x-2)\cdots(x-k) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k-2} a_{l+1}^{(k)}(k-l+1)(x-1)(x-2)\cdots(x-k+l) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k-2} (a_{l+1}^{(k)} + a_l^{(k)}(k-l+1))(k-l+1)(x-1)(x-2)\cdots(x-k+l) \\
&\quad + (2a_{k-1}^{(k)} + a_k^{(k)})(x-1) + a_k^{(k)}.
\end{aligned}
$$

这样, 取

$$
a_1^{(k+1)} = k+1+a_1^{(k)},
$$

$$
a_l^{(k+1)} = a_l^{(k)} + a_{l-1}^{(k)}(k-l+2), \quad 2 \leqslant l \leqslant k,
$$

$$
a_{k+1}^{(k+1)} = a_k^{(k)}.
$$

显然, 由上三式给出的 $a_1^{(k+1)}$, $a_2^{(k+1)}$, $\cdots$, $a_{k+1}^{(k+1)}$ 是与 x 无关的正整数, 所以对 $m = k+1$ 也是成立的.

于是完成了引理 3.1.1 的证明.

定理 3.1.1　*对任意整数 $k \geqslant 1$, 方程*

$$
S(m_1) + S(m_2) + S(m_3) + \cdots + S(m_k) = S(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k)
$$

有无穷多个正整数解.

证明　由引理 3.1.1 可知对任意的正整数 k, 存在正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ 使得

$$
\begin{aligned}
p^{k-1} = &(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1) \\
&+ \sum_{l=1}^{k-2} a_l(p-1)(p-2)\cdots(p-k+l+1) + a_{k-1}.
\end{aligned}
$$

因此

$$p^k = p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1) + \sum_{l=1}^{k-2} a_l p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+l+1) + a_{k-1}p.$$

注意到 $a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}$ 与 p 无关, 且 p 是充分大的素数, 由 $S(n)$ 的定义有

$$S(p^k) = kp,$$

$$S(p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)) = p,$$

$$S(a_l p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+l+1)) = p, \quad 1 \leqslant l \leqslant k-2,$$

$$S(a_{k-1}p) = p.$$

从这些等式知 $m_1 = (p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)$, $m_{l+1} = a_l p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+l+1)(1 \leqslant l \leqslant k-2)$, $m_k = a_{k-1}p$ 是方程的解, 由 p 的任意性, 定理 3.1.1 的方程有无穷多个正整数解.

再来给出另一种证明方法. 先看两个引理.

引理 3.1.2 *每一个充分大的奇整数可以表示成三个素数之和.*

证明 参阅文献 [8].

引理 3.1.3 *设 $k \geqslant 3$ 是奇数, 则对充分大的奇数 n 可以表示为 k 个奇素数的和*

$$n = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

证明 应用数学归纳法进行证明.

由引理 3.1.2 可知当 $k=3$ 是成立的. 假设对奇数 $k \geqslant 3$ 结论成立, 来证明对 $k+2$ 也成立. 事实上, 由引理 3.1.2 可知每一个充分大的奇数 n 有

$$n = p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)}.$$

由于 n 充分大, 故至少有一 $p^{(i)}$ 也是充分大的, 不妨设为 $p^{(1)}$, 则

$$p^{(1)} = p_1 + p_2 + \cdots + p_k,$$

因此

$$n = p_1 + p_2 + \cdots + p_k + p^{(2)} + p^{(3)},$$

即 n 可以表示成 $k+2$ 个奇素数之和.

于是完成了引理 3.1.3 的证明.

下面证明定理 3.1.1.

由引理 3.1.3 可知对任意的奇数 $k \geqslant 3$, 每一个充分大的素数 p 可表示成

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

因此

$$S(p)=S(p_1)+S(p_2)+\cdots+S(p_k).$$

这就意味着对奇数 $k\geqslant 3$ 方程的解有无穷多个.

如果 $k\geqslant 4$ 是偶数, 则对每一个充分大的素数 p, $p-2$ 是奇数, 由引理 3.1.3

$$p-2=p_1+p_2+\cdots+p_{k-1},$$

因此

$$p=2+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1},$$

即有

$$S(p)=S(2)+S(p_1)+S(p_2)+\cdots+S(p_{k-1}).$$

这就是说对 $k\geqslant 4$ 是偶数的时候定理也是成立的.

最后, 对任意的素数 $p\geqslant 3$, 有

$$S(p^2)=S(p^2-p)+S(p),$$

所以当 $k=2$ 时也是成立的.

于是完成了定理 3.1.1 的另一种证明.

前面讨论了方程

$$S(m_1)+S(m_2)+S(m_3)+\cdots+S(m_k)=S(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_k)$$

的可解性, 指出了对每一个正整数 k, 方程都有无穷多个正整数解. Sandor 在文献 [16] 中证明了对每一个 $k\geqslant 2$, 有无穷多个正整数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 和 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 满足

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

和

$$S(n_1+n_2+\cdots+n_k)<S(n_1)+S(n_2)+\cdots+S(n_k).$$

作为定理 3.1.1 和上面两个不等式的注解, 有

定理 3.1.2 如果正整数 k 和 m 满足下列三个条件之一:

(1) $k>2$ 和 $m\geqslant 1$ 都是奇数;

(2) $k\geqslant 5$ 是一奇数和 $m\geqslant 2$ 是一偶数;

(3) 对任意的偶数 $k>3$ 和任意的整数 $m\geqslant 1$.

方程

$$mS(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

有无穷多个正整数解 $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$.

$m=1$ 是定理 3.1.1 的结论, $m>1$ 的情形是文献 [17] 中的结论.

证明 设 $k \geqslant 3$ 是一奇数, 则由引理 3.1.3 对任意的奇数 m 和充分大的素数 p, 存在 k 个素数 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 使得

$$mp = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

注意到 $S(p_i) = p_i$ 和 $S(mp) = p$ $(p > m)$. 由上面的公式可得

$$mS(mp) = mp = p_1 + p_2 + \cdots + p_k = S(p_1) + S(p_2) + \cdots + S(p_k).$$

这就意味着, 如果取 $m_1 = p_1, m_2 = p_2, \cdots, m_k = p_k$, 则对任意奇数 $k \geqslant 2$ 和任意奇数 m 定理的结论是成立的. 如果 $m \geqslant 2$ 是一偶数, 则 $mp-2-3$ 是奇数, 因此对任意的奇数 $k \geqslant 5$, 由以上的结论可知

$$mp - 2 - 3 = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-2}$$

或者

$$mp = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-2} + 2 + 3.$$

在定理中取 $m_1 = p_1, m_2 = p_2, \cdots, m_{k-2} = p_{k-2}, m_{k-1} = 2, m_k = 3$, 则立即可得到

$$\begin{aligned} & mS(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) \\ = & mS(mp) = mp = p_1 + p_2 + \cdots + p_k \\ = & S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k). \end{aligned}$$

如果 $k \geqslant 4$ 和 m 都是偶数，则对每一个充分大的素数 p，$mp-3$ 是奇数，因此由引理 3.1.3 有

$$mp - 3 = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1},$$

即

$$mp = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1} + 3,$$

即当取 $m_1 = p_1, m_2 = p_2, \cdots, m_{k-1} = p_{k-1}, m_k = 3$ 时, 可得

$$mS(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k).$$

如果 $k \geqslant 4$ 是偶数, m 是奇数, 则仍然有

$$mp - 2 = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1},$$

即

$$mp = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1} + 2.$$

这就是说当取 $m_1 = p_1, m_2 = p_2, \cdots, m_{k-1} = p_{k-1}, m_k = 2$ 时, 结论依然成立.

3.2 关于 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程

Bencze 在文献 [18] 中给出了方程

$$S\left(\sum_{k=1}^{n} n^k\right) = \varphi(n)\prod_{k=1}^{n} S(k).$$

在此利用初等方法研究该方程, 并求得整数解.

由函数 $S(n)$ 的定义得出下面几个引理:

引理 3.2.1 (参阅文献 [19]) *a 是任意一正整数, 则 $S(a) > 1$.*

引理 3.2.2 (参阅文献 [19]) *如果 a, b 是互素的, 则有*

$$S(ab) = \max\{S(a), S(b)\}.$$

引理 3.2.3 (参阅文献 [20]) *如果 p 是一素数, α 是一正整数, 有*

$$S(p) \leqslant p\alpha \quad 和 \quad p|S(p^\alpha).$$

应用上述三个引理, 可以证明

定理 3.2.1 *方程*

$$S\left(\sum_{k=1}^{n} n^k\right) = \varphi(n)\prod_{k=1}^{n} S(k)$$

只有一个正整数解 $n = 1$.

证明 很容易看出, 当 $n \leqslant 5$ 时, 只有一个解 $n = 1$. 现在假定一个大于 5 的正整数 n 是方程的解. 由于 $(n, 1+n+\cdots+n^{n-1}) = 1$, 则由引理 3.2.2,

$$\begin{aligned} S\left(\sum_{k=1}^{n} n^k\right) &= S(n(1+n+\cdots+n^{n-1})) \\ &= \max\{S(n), S(1+n+\cdots+n^{n-1})\}. \end{aligned}$$

如果 $S(n) \geqslant S(1+n+\cdots+n^{n-1})$, 则

$$1 = \varphi(n)\prod_{k=1}^{n} S(k),$$

由于 $n > 5$, 由引理 3.2.1 知 $S(n-1) > 1$, 产生矛盾. 故 $S(n) < S(1+n+\cdots+n^{n-1})$. 所以

$$S(1+n+\cdots+n^{n-1}) = \varphi(n)\prod_{k=1}^{n} S(k).$$

设

$$1+n+\cdots+n^{n-1}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},$$

由引理 3.2.2, 有

$$S(1+n+\cdots+n^{n-1})=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_r^{\alpha_r})\},$$

即

$$S(1+n+\cdots+n^{n-1})=S(p^{\alpha}),$$

其中 $p^{\alpha}=S(p_j^{\alpha_j})$, $1\leqslant j\leqslant r$. 因此

$$S(p^{\alpha})=\varphi(n)\prod_{k=1}^{n}S(k).$$

由于 p 是一素数, 结合引理 3.2.3, $p|\varphi(n)$ 或者 $p|S(k)$, $1\leqslant k\leqslant n$.

另一方面, 由引理 3.2.3, 有 $S(p^{\alpha})\leqslant \alpha p$. 因此

$$\alpha p\geqslant \varphi(n)\prod_{k=1}^{n}S(k).$$

又当 $n>5$ 时, $\varphi(n)>1$, $S(k)>1(k=2,3,\cdots,n)$. 因此

$$\alpha\geqslant \frac{1}{p}\varphi(n)\prod_{k=1}^{n}S(k)>2^{n-1}.$$

然而, 由于 $1+n+\cdots+n^{n-1}$ 是奇数, 有 $p^{\alpha}<n^{n}$ 和

$$\alpha<\frac{n\ln n}{\ln p}<\frac{n\ln n}{\ln 3}<n\ln n.$$

从而

$$n\ln n>2^{n-1},\quad n>5,$$

显然当 $n>5$ 时, 这是不可能的. 因此方程只有一个解 $n=1$.

另外, 讨论另一个方程的求解, 即

定理 3.2.2 *方程 $S(n)=\varphi(n)$ 只有 5 个解, 依次为*

$$n=1,\ 8,\ 9,\ 12,\ 18.$$

证明 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准素因数分解式, 则有

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i{}^{\alpha_i})\}:=S(p^{\alpha}).$$

所以从 $S(n)$ 和 $\varphi(n)$ 的定义知

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\\&=\varphi(p^\alpha)\varphi(n_1)=p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)=S(p^\alpha).\end{aligned}$$

显然 $n=1$ 是方程 $S(n)=\varphi(n)$ 的一个解. 当 $n>1$, 分下列三种情况讨论:

(1) 如果 $\alpha=1$ 且 $n=p$, 那么 $S(n)=p\neq p-1=\varphi(n)$. 也就是说, 没有任何素数满足这个方程. 如果 $\alpha=1$ 且 $n=n_1p$, 那么 $S(n)=p\neq(p-1)\varphi(n_1)=\varphi(n_1p)$. 于是这个方程也没有解.

(2) 如果 $\alpha=2$, 那么 $S(p^2)=2p$ 而且 $\varphi(p^2n_1)=p(p-1)\varphi(n_1)$. 所以在这种情况下当且仅当

$$(p-1)\varphi(n_1)=2$$

时 $S(n)=\varphi(n)$ 才成立.

此时, 就会出现两种情形: $p-1=1$, $\varphi(n_1)=2$ 和 $p-1=2$, $\varphi(n_1)=1$. 即, $p=2$, $n_1=3$ 和 $p=3$, $n_1=1$ 或 $n_1=2$.

于是该方程有三个解: $n=12$, 9, 18.

(3) 如果 $\alpha=3$, 显然 $S(2^3)=\varphi(2^3)=4$, 所以 $n=8$ 满足这个方程.

如果 $\alpha\geqslant 3$ 并且 $p>2$, 注意到

$$p^{\alpha-2}>2^{\alpha-2}=(1+1)^{\alpha-2}=1+\alpha-2+\cdots+1>\alpha,$$

即

$$p^{\alpha-1}>\alpha p\Rightarrow p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)>\alpha p,$$

但是

$$S(p^\alpha)\leqslant\alpha p.$$

所以此时该方程无解.

根据以上三种情形, 方程 $S(n)=\varphi(n)$ 有且仅有五个解, 依次为

$$n=1,\ 8,\ 9,\ 12,\ 18.$$

3.3 关于 Smarandache 函数和伪 Smarandache 函数的方程

定义 3.3.1 对任意的正整数 n, 定义伪 Smarandache 函数为

$$Z(n)=\min\left\{k\in\mathbf{N}:n\left|\frac{k(k+1)}{2}\right.\right\}.$$

Aschbacher 在文献 [21] 中提出了关于方程

$$S(n) = Z(n)$$

的两个问题.

(1) 证明当 n 是偶完全数时, 满足方程;

(2) 证明方程有无穷多个正整数解.

本节就来讨论这两个问题.

定理 3.3.1 *当 n 是偶完全数时, n 是方程 $S(n) = Z(n)$ 的解.*

证明 由文献 [22], 当 n 是偶完全数时, 则

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

其中 p 为素数.

由 $S(n)$ 的定义

$$S(n) = 2^p - 1.$$

另一方面, 由于

$$\frac{1}{2}(2^p - 1)((2^p - 1) + 1) = n,$$

这样

$$Z(n) = 2^p - 1.$$

于是完成了定理 3.3.1 的证明.

定理 3.3.2 *方程 $S(n) = Z(n)$ 有无穷多个解.*

证明 设 p 是一素数, 且 $p \equiv 3 (\text{mod } 4)$. 由于 $S(2) = 2$, $S(p) = p$,

$$S(2p) = \max\{S(2), S(p)\} = \max\{2, p\} = p.$$

令 $t = Z(2p)$, 由 $Z(n)$ 的定义

$$\frac{1}{2}t(t+1) \equiv 0 (\text{mod } 2p),$$

即 $t \equiv 0 (\text{mod } p)$, 或者 $t + 1 \equiv 0 (\text{mod } p)$, 因此 $t \geqslant p - 1$.

如果 $t = p - 1$, 有

$$\frac{1}{2}p(p-1) \equiv 0 (\text{mod } 2p),$$

也就有

$$\frac{1}{2}p(p-1) \equiv 0 (\text{mod } 2).$$

但是, 由于 $p \equiv 3 (\text{mod } 4)$, 出现了矛盾. 因此必须

$$t \geqslant p.$$

又由于 $p+1\equiv 0(\bmod\ 4)$, 所以有

$$\frac{1}{2}p(p+1)\equiv 0(\bmod\ 2p)$$

和 $t=p$, 即 $n=2p$ 是方程的解. 由于存在无穷多个素数满足 $p\equiv 3(\bmod\ 4)$, 因此方程有无穷多个正整数解.

3.4 关于 Smarandache 对偶函数的方程

定义 3.4.1 对任意的正整数 n, Smarandache 对偶函数 $S^*(n)$ 定义为

$$S^*(n)=\max\{m|\ m!|n\}.$$

Smarandache 对偶函数与 Smarandache 函数有着非常密切的关系. 因此研究 Smarandache 对偶函数的性质非常有意义. 现在给出另一个 Smarandache 对偶函数 $\overline{S}_k(n)$ 的定义.

定义 3.4.2 对任意的正整数 n, $\overline{S}_k(n)$ 表示为最大的正整数 m 使得 $m^k|n$, 即

$$\overline{S}_k(n)=\max\{m|\ m^k|n\}.$$

另外再给出一个函数的定义.

定义 3.4.3 设 n 是任意一正整数, 函数 $\Omega(n)$ 定义为 n 的素因子的个数, 即设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 则

$$\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r.$$

在此构造并讨论方程

$$\overline{S}_3(1)+\overline{S}_3(2)+\cdots+\overline{S}_3(n)=3\Omega(n)$$

的正整数解问题.

引理 3.4.1 对任意的正整数 $n>8$, 有

$$\overline{S}_3(1)+\overline{S}_3(2)+\cdots+\overline{S}_3(n)>3\Omega(n).$$

证明 令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 当 $n>8$ 时有

$$\overline{S}_3(1)+\overline{S}_3(2)+\cdots+\overline{S}_3(n)>n.$$

由 $\Omega(n)$ 的定义

$$\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r.$$

因此只需证明不等式

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r} > 3(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r).$$

对 r 用数学归纳法进行证明.

(1) 如果 $r=1$, 则 $n=p_1^{\alpha_1}$.

(a) 如果 $p_1=2$, 则有 $\alpha_1 \geqslant 4$, 因此

$$2^4 > 3\cdot 4,\quad 2^{\alpha_1} > 3\alpha_1.$$

(b) 如果 $p_1=3$, 5 和 7, 则有 $\alpha_1 \geqslant 2$, 因此

$$i^4 > 3\cdot 2,\quad i^{\alpha_1} > 3\alpha_1,\quad i=3,5,7.$$

(c) 如果 $p_1 \geqslant 11$, 则有 $\alpha_1 \geqslant 1$, 因此

$$p_1^{\alpha_1} > 3\alpha_1,$$

即 $r=1$ 时成立.

(2) 假定对所有的 $r \geqslant 2$ 也是成立的, 证明对所有的 $r+1$ 也成立. 由假设归纳可知

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} > 3(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)p_{r+1}^{\alpha_{r+1}},$$

p_{r+1} 为素数,

$$p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} > \alpha_{r+1}+1.$$

由此可以得到

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} > 3(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)(\alpha_{r+1}+1).$$

注意到, 如果 $a>1$,$b>1$, 则 $a\cdot b \geqslant a+b$, 因此

$$\begin{aligned}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)(\alpha_{r+1}+1) &\geqslant \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r+\alpha_{r+1}+1\\ &> \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r+\alpha_{r+1}.\end{aligned}$$

从而

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} > 3(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r+\alpha_{r+1}).$$

于是完成了引理 3.4.1 的证明.

定理 3.4.1 *对任意的正整数 n, 方程*

$$\overline{S}_3(1)+\overline{S}_3(2)+\cdots+\overline{S}_3(n)=3\Omega(n)$$

只有三个解: $n=3, 6, 8$.

证明　把正整数分成两类:

(1) 如果 $n\leqslant 8$, 由 $\overline{S}_k(n)$ 和 $\Omega(n)$ 的定义, 则有

$$\overline{S}_3(1)=1,\quad \overline{S}_3(2)=1,\quad \overline{S}_3(3)=1,\quad \overline{S}_3(4)=1,$$

$$\overline{S}_3(5)=1,\quad \overline{S}_3(6)=1,\quad \overline{S}_3(7)=1,\quad \overline{S}_3(8)=2,$$

$$\Omega(1)=0,\quad \Omega(2)=1,\quad \Omega(3)=1,\quad \Omega(4)=2,$$

$$\Omega(5)=1,\quad \Omega(6)=2,\quad \Omega(7)=1,\quad \Omega(8)=3,$$

则有

$$\overline{S}_3(1)+\overline{S}_3(2)+\overline{S}_3(3)=3\Omega(3),$$

$$\overline{S}_3(1)+\overline{S}_3(2)+\cdots+\overline{S}_3(6)=3\Omega(6),$$

$$\overline{S}_3(1)+\overline{S}_3(2)+\cdots+\overline{S}_3(8)=3\Omega(8).$$

因此 $n=3,6,8$ 是方程的正整数解.

(2) 如果 $n>8$, 由引理 3.4.1, 当 $n>8$ 时方程无解, 即方程

$$\overline{S}_3(1)+\overline{S}_3(2)+\cdots+\overline{S}_3(n)=3\Omega(n)$$

只有三个解:$n=3, 6, 8$.

于是完成了定理 3.4.1 的证明.

3.5　Smarandache 方程及其整数解

令 $\mathbf{Q}$ 表示所有有理数的集合, $a\in\mathbf{Q}\backslash\{-1,0,1\}$. 在文献 [1] 中有关于方程

$$xa^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}a^{x}=2a$$

的整数解的问题. 张文鹏教授 [23] 证明了该方程有且仅有一个实数解 $x=1$(参阅文献 [21]). 现在把这一问题进行推广, 即讨论方程

$$\frac{1}{x_1}a^{x_1}+\frac{1}{x_2}a^{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}a^{x_n}=na$$

的整数解的问题.

定理 3.5.1　*对任意给定的实数 $a\neq 0$, 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$, 则方程*

$$\frac{1}{x_1}a^{x_1}+\frac{1}{x_2}a^{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}a^{x_n}=na$$

只有一组非负实根 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

证明 分两种情况来讨论:

(1) 当 $a > 0$ 时, 令

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = \frac{1}{x_1}a^{x_1} + \frac{1}{x_2}a^{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}a^{x_n} - na.$$

如果把 x_n 看成是 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的函数, 则

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) \\ =&\frac{1}{x_1}a^{x_1} + \frac{1}{x_2}a^{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}}a^{x_{n-1}} + x_1x_2\cdots x_{n-1}a^{\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}} - na, \end{aligned}$$

则 f 对每一个变量 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 的偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{1}{x_i}a^{x_i}\left(\ln a - \frac{1}{x_i}\right) + \frac{1}{x_i}a^{\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}}(x_1x_2\cdots x_{n-1} - \ln a) \\ &= \frac{1}{x_i}\left(a^{x_i}\left(\ln a - \frac{1}{x_i}\right) + a^{x_n}\left(\frac{1}{x_n} - \ln a\right)\right). \end{aligned}$$

再令

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = a^{x_i}\left(\ln a - \frac{1}{x_i}\right) + a^{x_n}\left(\frac{1}{x_n} - \ln a\right),$$

则 g 对每个变量 x_i 的偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_i} &= a^{x_i}\left(\ln^2 a - \frac{\ln a}{x_i} + \frac{1}{x_i^2} + \frac{a^{x_n}}{x_ix_n}(x_n^2\ln^2 a - x_n\ln a + 1)\right) \\ &= \frac{a^{x_i}}{x_i^2}\left(\left(x_i\ln a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{a^{x_n}}{x_ix_n}\left(\left(x_n\ln a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) > 0. \end{aligned}$$

很容易证明函数 $u(x) = a^x\left(\ln a - \dfrac{1}{x}\right)$ 当 $x > 0$ 是单调递增函数. 所以

(a) 如果 $x_i > x_n$, $g > 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} > 0$,$f$ 对变量 x_i 是递增的;

(b) 如果 $x_i < x_n$, $g < 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} < 0$,$f$ 对变量 x_i 是递减的;

(c) 如果 $x_i = x_n$, $g = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, 可得到 f 的最小值. 有

$$f \geqslant f_{x_1=x_n} \geqslant f_{x_1=x_2=x_n} \geqslant \cdots \geqslant f_{x_1=x_2=\cdots=x_n} \geqslant f_{x_1=x_2=\cdots=x_n=1} = 0,$$

这样即可得到方程只有一个整数解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

(2) 当 $a<0$ 时, 方程可写成

$$\frac{1}{x_1}(-1)^{x_1}|a|^{x_1}+\frac{1}{x_2}(-1)^{x_2}|a|^{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}(-1)^{x_n}|a|^{x_n}=-n|a|.$$

因此可知 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不是无理数.

令 $x_i=\dfrac{q_i}{p_i}$ q_i,p_i 互素, 则 p_i 一定是奇数, 因为非负数没有实平方根. 由于 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$, 则 $p_1p_2\cdots p_n=q_1q_2\cdots q_n$, 因此 q_i 也是奇数且 $(-1)^{x_i}=-1(i=1,2,\cdots,n)$. 在这种情况下的方程就可写成

$$\frac{1}{x_1}|a|^{x_1}+\frac{1}{x_2}|a|^{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}|a|^{x_n}=n|a|.$$

由 (1) 的结论, 定理仍然成立.

于是完成了定理 3.5.1 的证明.

3.6 关于函数 $\delta_k(n)$ 的方程

对于定义 2.6.1 的函数 $\delta_k(n)$, 取 $k=2$, 则有 $\delta_2(1)=1$, $\delta_2(2)=1$, $\delta_2(3)=1$, $\delta_2(4)=1$, $\delta_2(6)=2$, $\cdots$.

定义方程

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_k(i)=\delta_k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right),$$

显然 $n=1$ 是该方程的解. 但是除了 1 之外, 还有没有其他的解? 现在来讨论这个方程的解的问题.

引理 3.6.1 *如果 $n=4m$ 或者 $n=4m+3(m=1,2,\cdots)$, 有*

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_2(i)>\delta_2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

证明 由函数 $\delta_k(n)$ 的定义

(1) 如果 $n=4m$, 则

$$\sum_{i=1}^{4m}\delta_2(i)\geqslant\sum_{\substack{l\leqslant 4m\\ 2\nmid l}}l+\sum_{\substack{l\leqslant 4m\\ 2\mid l}}1=\frac{2m((4m-1)+1)}{2}+2m=4m^2+2m,$$

但是

$$\delta_2\left(\frac{4m(4m+1)}{2}\right)\leqslant m(4m+1)=4m^2+m<4m^2+2m,$$

因此

$$\sum_{i=1}^{4m}\delta_2(i)>\delta_2\left(\frac{4m(4m+1)}{2}\right).$$

(2) 如果 $n=4m+3$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4m+3}\delta_2(i)\geqslant&\sum_{\substack{l\leqslant 4m+3\\2\nmid l}}l+\sum_{\substack{l\leqslant 4m+3\\2\mid l}}1\\&=\frac{(2m+1)((4m+3)+1)}{2}+2m+1=4m^2+8m+3,\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}&\delta_2\left(\frac{(4m+3)(4m+3+1)}{2}\right)\leqslant(m+1)(4m+3)\\=&4m^2+7m+3<4m^2+8m+3,\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{4m+3}\delta_2(i)>\delta_2\left(\frac{(4m+3)(4m+3+1)}{2}\right).$$

结合 (1) 和 (2), 就完成了引理 3.6.1 的证明.

引理 3.6.2 如果 $k=p$ 为奇素数, 则当 $n=tp$ 或 $tp-1(t=1,2,\cdots)$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_k(i)>\delta_k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

证明 $k=p$ 为奇素数,

(1) 如果 $n=tp$, 则

$$\sum_{i=1}^{tp}\delta_k(i)>\sum_{\substack{l\leqslant tp\\(l,p)=1}}l=\sum_{l\leqslant tp}l-\sum_{\substack{l\leqslant tp\\p\mid l}}l=\frac{tp(tp+1)}{2}-\frac{tp(t+1)}{2}=\frac{t^2p^2-t^2p}{2},$$

但是

$$\delta_k\left(\frac{tp(tp+1)}{2}\right)\leqslant\frac{t(tp+1)}{2}<\frac{t^2p^2-t^2p}{2}.$$

(2) 如果 $n=tp-1$, 则

$$\sum_{i=1}^{tp-1}\delta_k(i)>\sum_{\substack{l\leqslant tp-1\\(l,p)=1}}l=\sum_{l\leqslant tp-1}l-\sum_{\substack{l\leqslant tp-1\\p\mid l}}l=\frac{tp(tp-1)}{2}-\frac{tp(t-1)}{2}=\frac{t^2p^2-t^2p}{2},$$

但是

$$\delta_k\left(\frac{tp(tp-1)}{2}\right) \leqslant \frac{t(tp-1)}{2} < \frac{t^2p^2-t^2p}{2}.$$

结合 (1) 和 (2), 就完成了引理 3.6.2 的证明.

定理 3.6.1　*如果* $k=2^\alpha(\alpha=1,2,\cdots)$, *则方程*

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_k(i)=\delta_k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

只有一个解 $n=1$.

证明　注意到对任意的素数 p 和正整数 n, 有 $(n,p)=(n,p^\alpha)(\alpha=1,2,\cdots)$, 则 $\delta_p(n)=\delta_{p^\alpha}(n)$, 方程

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_{p^\alpha}(i)=\delta_{p^\alpha}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_p(i)=\delta_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

因此, 只需讨论当 $k=p$ 的情形. 把正整数分为两类:

(1) 如果 $n\leqslant 3$, 由函数 $\delta_k(n)$ 的定义有

$$\delta_2(1)=1,\quad \delta_2(2)=1,\quad \delta_2(3)=1.$$

显然 $n=1$ 是方程的解.

(2) 如果 $n>3$, 则对任意的正整数 m, 有

(a) 如果 $n=4m+1$ 或 $n=4m+2$, 显然有

$$\delta_2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

注意到在和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_2(i)$ 中, 至少存在一项使得 $\delta_2(i)<i$, 如 $(\delta_2(4m)\leqslant m<4m)$. 因此

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_2(i)<\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2},$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_2(i)<\delta_2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

(b) 如果 $n=4m$ 或 $n=4m+3$, 则由引理 3.6.1 有

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_2(i)>\delta_2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

也就是说, 方程在这些情况下均无解. 所以由以上的讨论可知方程只有一个解 $n=1$.

定理 3.6.2 如果 $k=p^\alpha$(p 为奇素数, $\alpha=1,2,\cdots$), 则方程

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_k(i)=\delta_k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

有 $p-2$ 个正整数解 $n=1,2,3,\cdots,p-2$.

证明 同定理 3.6.1 的证明方法有

(1) 如果 $n\leqslant p-2$, 则对 $1\leqslant i\leqslant n\leqslant p-2$, 有 $(i,p)=1$, $\delta_k(i)=i$. 因此

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_k(i)=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

下面证明 $\delta_k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}$.

事实上, 由于 $(n,n+1)=1$ 和 $n\leqslant p-2$, 所以 $(n,p)=1$. 当 $n\leqslant p-2$ 时, 则有 $n+1\leqslant p-1$, 如果 $n+1=p-1$, 则 $\left(\frac{n+1}{2},p\right)=1$; 如果 $n+1<p-1$, 则 $(n+1,p)=1$. 所以如果 $n\leqslant p-2$, 则有 $\left(\frac{n+1}{2},p\right)=1$,

$$\delta_k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

因此对每一个正整数 $n\leqslant p-2$, 都有

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_k(i)=\delta_k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

也就是说,$n=1,2,\cdots,p-2$ 都是方程的正整数解.

(2) 如果 $n>p-2$, 则对每一个正整数 t 有

(a) 如果 $n=tp+r(1\leqslant r\leqslant p-2$ 是一正整数), 则有

$$\delta_k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

注意到在和式 $\sum_{i=1}^{n}\delta_2(i)$ 中, 至少存在一项使得 $\delta_2(i)<i$, 如 $(\delta_k(tp)\leqslant t<tp)$. 因此

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_k(i)<\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2},$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_k(i)<\delta_k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

(b) 如果 $n = tp$ 或 $n = tp - 1$, 则由引理 3.6.2 有

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_k(i) > \delta_k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

结合 (a), (b), 可知在 $n > p - 2$ 下方程无解. 由 (1) 和 (2), 方程有 $p - 2$ 个正整数解. 于是完成了定理 3.6.2 的证明.

3.7 关于 Smarandache 原函数 $S_p(n)$ 的方程

在文献 [1] 中的第 47, 48 和 49 个问题中, Smarandache 教授建议研究 Smarandache 原函数 $S_p(n)$ 的性质. 首先

定义 3.7.1 设 p 是一素数, n 是任意的正整数, Smarandache 原函数 $S_p(n)$ 定义为最小的正整数 m, 满足 $p^n|m!$, 即

$$S_p(n) = \min\{m \in \mathbf{N} : p^n|m!\}.$$

例如, $S_3(1) = 3$, $S_3(2) = 6$, $S_3(3) = S_3(4) = 9, \cdots$.

关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 以及 Smarandache 原函数 $S_p(n)$ 的方程解的研究是重要和有意义的课题. 前面已经讨论了一些关于 Smarandache 函数的方程的解的问题. 现在来研究两个包含 Smarandache 原函数 $S_p(n)$ 的方程

$$\sum_{d|n} S_p(d) = 2pn$$

和

$$\sum_{i=1}^{n} S_p(i) = S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

的可解性.

先介绍两类特殊的数: 完全数和 Mersenne 数.

定义 3.7.2 一个数恰好等于它所有的真因子的和, 这样的数叫做完全数.

定义 3.7.3 形如 $M_n = 2^n - 1$ 的数称为 Mersenne 数. 如果 $2^n - 1$ 是一素数, 则称它为 Mersenne 素数.

引理 3.7.1 对任意的正整数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 且 $(m_1, m_2, \cdots, m_n) = 1$, 则有

$$m_1!m_2!\cdots m_n!|(m_1 + m_2 + \cdots + m_n - 1)!.$$

证明 因为 $(m_1, m_2, \cdots, m_n) = 1$, 所以存在整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得 $a_1m_1 +$

$a_2m_2+\cdots+a_nm_n=1$. 上式两边同乘以 $(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!$ 可得

$$\begin{aligned}&a_1m_1(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!+a_2m_2(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!\\&+\cdots+a_nm_n(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!\\=&(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!,\end{aligned}$$

注意到 $(m_1-1)!m_2!\cdots m_n!|(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!$, 所以有

$$m_1!m_2!\cdots m_n!|(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!m_1.$$

同理可得

$$m_1!m_2!\cdots m_n!|(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!m_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$m_1!m_2!\cdots m_n!|(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!m_n,$$

从而

$$m_1!m_2!\cdots m_n!|(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!.$$

于是完成了引理 3.7.1 的证明.

引理 3.7.2 设 n 是正整数, p 是素数, 满足 $p^\alpha\|n!$, 那么 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{p^i}\right]$.

证明 参阅文献 [15].

定理 3.7.1 设 p 为素数, 则对任意的正整数 $n\leqslant p$, 方程

$$\sum_{d|n}S_p(d)=2pn$$

当且仅当 n 是完全数时成立. 如果 n 是一偶完全数, 则 $n=2^{r-1}(2^r-1)$, $r\geqslant 2$.

证明 事实上, 如果 $n\leqslant p$, 则

$$\sum_{d|n}S_p(d)=\sum_{d|n}pd=p\sigma(n)=2pn,$$

即

$$\sigma(n)=2n.$$

由完全数的定义可知 n 是一完全数.

由于 2^r-1 是素数, 则 $(2^{r-1},2^r-1)=1$. $\sigma(n)$ 是可乘函数且 $\sigma(p)=p+1=2^r$, 因此

$$\sigma(n)=\sigma(2^{r-1})\sigma(2^r-1)=(2^r-1)((2^r-1)+1)=2^r(2^r-1)=2n.$$

所以 n 是一完全数.

反之, 假设 n 是任意的偶完全数, 记 $n=2^{r-1}k$, 其中 k 是奇数且 $k\geqslant 2$, 则

$$2^r k=2n=\sigma(n)=\sigma(2^{r-1}k)=\sigma(2^{r-1})\sigma(k)=(2^r-1)\sigma(k).$$

因为 $(2^r,2^r-1)=1$, 为了使 $2^r k=(2^r-1)\sigma(k)$ 成立, k 必须有因子 2^r-1. 所以假设 $k=(2^r-1)q$, 则

$$\sigma(k)=2^r q=k+q,$$

即 k 只有两个因子 k 和 q. 所以 $q=1$, $k=2^r-1$, 且 k 是素数.

事实上, 如果对某个正整数 r,2^r-1 是素数, 则 r 也是素数. 设 a 和 b 为两个正整数, 则

$$x^{ab}-1=(x^a-1)(x^{a(b-1)}+x^{a(b-2)}+\cdots+x^b+1).$$

所以如果 n 是合数, 则 2^n-1 也是合数. 于是完成了定理 3.7.1 的证明.

定理 3.7.2 设 p 是一素数, 则对任意的正整数 $n\leqslant p$, 方程

$$\sum_{i=1}^{n}S_p(i)=S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

有有限个解 $n=1, 2, \cdots, \left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right]$.

特别对 $p=3, 5, 7$, 有

推论 3.7.1 方程

$$S_3(1)+S_3(2)+\cdots+S_3(n)=S_3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

的所有正整数解为 $n=1,2$.

推论 3.7.2 方程

$$S_5(1)+S_5(2)+\cdots+S_5(n)=S_5\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

的所有正整数解为 $n=1,2$.

推论 3.7.3 方程

$$S_7(1)+S_7(2)+\cdots+S_7(n)=S_7\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

的所有正整数解为 $n=1,2,3$.

定理 3.7.2 的证明 首先由 $S_p(n)$ 的定义可知, 当且仅当 $n\leqslant p$ 时, $S_p(n)=pn$.

如果 $n>p$, 则 $S_p(n)<pn$. 因此假如 $\frac{n(n+1)}{2}\leqslant p$, 即 $1\leqslant n\leqslant\left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right]$, 那么

$$S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}p.$$

注意到 $\left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right]\leqslant p$, 因此当 $1\leqslant n\leqslant\left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right]$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}S_p(i)=p+2p+\cdots+np=\frac{n(n+1)}{2}p.$$

结合上两式, 容易得到 $n=1,2,\cdots,\left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right]$ 是方程的解.

如果 $\left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right]<n\leqslant p$, 则 $\frac{n(n+1)}{2}>p$, 那么

$$S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)<\frac{n(n+1)}{2}p.$$

然而

$$\sum_{i=1}^{n}S_p(i)=p+2p+\cdots+np=\frac{n(n+1)}{2}p.$$

因此, 方程无解.

如果 $n=p+1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}S_p(i)=p+2p+\cdots+p\cdot p+p\cdot p=\frac{p(p+3)}{2}p.$$

$p=2$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}S_p(i)=S_2(1)+S_2(2)+S_2(3)=\frac{2(2+3)}{2}2=10,$$

而 $S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=S_2(6)=8<10$. 此种情况下方程无解.

$p=3$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}S_p(i)=S_3(1)+S_3(2)+S_3(3)+S_3(4)=\frac{3(3+3)}{2}3=27,$$

而 $S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=S_3(10)=24<27$. 所以此种情况下方程也无解.

当 $p>3$ 时, 考虑到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{\frac{p^2+3p-2}{2}p}{p^i}\right]=\frac{p^2+3p-2}{2}+\left[\frac{p^2+3p-2}{2p}\right]$$
$$=\frac{p^2+3p-2}{2}+\frac{p+1}{2}=\frac{p^2+4p-1}{2}\geqslant\frac{(p+1)(p+2)}{2},$$

所以

$$S_p\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right)\leqslant\frac{(p^2+3p-2)}{2}p\leqslant\frac{p(p+3)}{2}p,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}S_p(i)>S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right),$$

从而 $n=p+1$ 不是方程的解.

如果 $n\geqslant p+2$, 那么总存在 $m_i\leqslant i(i=1,2,\cdots,n)$, 使得 $S_p(1)=m_1p$, $S_p(2)=m_2p$, $\cdots$, $S_p(n)=m_np$. 所以

$$\sum_{i=1}^{n}S_p(i)=m_1p+m_2p+\cdots+m_np$$
$$=(m_1+m_2+\cdots+m_n)p. \tag{3-1}$$

事实上, 有 $m_1=1$, $m_2=2$, $\cdots$, $m_p=p$, 并且由 $S_p(n)$ 的定义, 有

$$j\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_ip}{p^i}\right],\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

另一方面, 注意到 $m_{p+1}=p$, $m_{p+2}=p+1$, 所以 m_p, m_{p+1}, $\cdots$, m_n 互素, 当 $p>2$ 时, 利用取整函数 $[x]$ 的性质并结合引理 3.7.1 和引理 3.7.2 及 (3-1), 有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1}{p^i}\right]$$
$$=m_1+m_2+\cdots+m_n-1$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1}{p^i}\right]$$
$$=m_1+m_2+\cdots+m_n-1$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)p+p-1}{p^i}\right]$$
$$=m_1+m_2+\cdots+m_n-1$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{\frac{p(p-1)}{2}p+p-1+(m_p+m_{p+1}+\cdots+m_n-1)p}{p^i}\right]$$

$$\geqslant m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{\dfrac{p^2(p-1)}{2}+p-1}{p^i}\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_p+m_{p+1}+\cdots+m_n-1}{p^i}\right]$$

$$\geqslant m_1+m_2+\cdots+m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_p+m_{p+1}+\cdots+m_n-1}{p^i}\right]$$

$$\geqslant\left(m_p+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_p}{p^i}\right]\right)+\left(m_{p+1}+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_{p+1}}{p^i}\right]\right)+\cdots$$

$$+\left(m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_n}{p^i}\right]\right)+m_1+m_2+\cdots+m_{p-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_1p}{p^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_2p}{p^i}\right]+\cdots+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_np}{p^i}\right]$$

$$\geqslant 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

也就是说 $p^{\frac{n(n+1)}{2}}|((m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1)!$. 因此

$$S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\leqslant(m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1$$
$$<(m_1+m_2+\cdots+m_n)p, \qquad (3\text{-}2)$$

结合 (3-1),(3-2), 可得 $S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)>S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$. 当 $p=2$ 时, 同理于上面的分析, 容易得到 $S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)>S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$. 所以, 当 $n\geqslant p+2$ 时, 方程无解.

综上, 完成了定理 3.7.2 的证明.

3.8 包含 Smarandache 函数的方程

对于 Smarandache 函数的求和式 $\sum_{d|n}S(d)$, 不难发现: 当 n 为素数 p 时有不等式 $\sum_{d|n}S(d)>n$; 而当 $n=p^2$ ($p>3$ 为素数) 时有 $\sum_{d|n}S(d)<n$. 于是很自然地想到, 对于哪些自然数 n, 会有方程 $\sum_{d|n}S(d)=n$ 成立. 在此应用初等方法研究方程

$\sum\limits_{d|n} S(d) = n$, 并给出了它的所有解.

首先需要几个简单引理并作以下证明.

引理 3.8.1　*方程 $\sum\limits_{d|n} S(d) = n$ 没有 $n = p^\alpha$ 形式的正整数解, 这里 p 为素数, α 为任意正整数.*

证明　用反证法进行证明. 假定方程 $\sum\limits_{d|n} S(d) = n$ 有 $n = p^\alpha$ 形式的正整数解, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} S(d) &= \sum_{d|p^\alpha} S(d) = 1 + S(p) + S(p^2) + S(p^3) + \cdots + S(p^\alpha) \\ &= 1 + p + 2p + S(p^3) + \cdots + S(p^\alpha) = p^\alpha.\end{aligned}$$

注意到对任意正整数 β 有 $p|S(p^\beta)$.从上式等号右边可以看出 $p|p^\alpha$, 而左边从第二项开始均有 $p|S(p^\beta)$, 从而推出 $p|1$, 与 $p\nmid 1$ 矛盾. 所以方程 $\sum\limits_{d|n} S(d) = n$ 没有 $n = p^\alpha$ 形式的正整数解.

引理 3.8.2　*设 $n > 1$ 且 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准素因数分解式, 则方程 $\sum\limits_{d|n} S(d) = n$ 有解的必要条件为 $\alpha_1 \geqslant 2$ 且 $k \geqslant 2$.*

证明　当 $k = 1$ 时, 由引理 3.8.1 知该方程无解. 于是若该方程有解则必有 $k \geqslant 2$.

此时假定 $\alpha_1 = 1$, 即 $n = p_1 p_2{}^{\alpha_2} \cdots p_k{}^{\alpha_k} = p_1 m$ 且 $(p_1, m) = 1$, 注意到对任意 $p|m$ 有 $S(p_1 p) = S(p)$, 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} S(d) &= \sum_{d_1|p_1} \sum_{d_2|m} S(d_1 d_2) = \sum_{d_2|m} S(d_2) + \sum_{d_2|m} S(p_1 d_2) \\ &= \sum_{d_2|m} S(d_2) + S(p_1) + \sum_{\substack{d_2|m \\ d_2>1}} S(p_1 d_2) \\ &= \sum_{d_2|m} S(d_2) + S(p_1) + \sum_{\substack{d_2|m \\ d_2>1}} S(d_2) \\ &= 2\sum_{d_2|m} S(d_2) + p_1 - 1 \neq p_1 m,\end{aligned}$$

这是因为 $p_1 = 2$ 时, 上式左边为奇数, 而右边为偶数; $p_1 > 2$ 时, 上式左边为偶数, 而右边为奇数. 所以, 要使方程 $\sum\limits_{d|n} S(d) = n$ 成立必须 $\alpha_1 \geqslant 2$ 且 $k \geqslant 2$. 于是完成引理 3.8.2 的证明.

引理 3.8.3 当 $n \geqslant 8$ 时, $\frac{n}{d(n)} \geqslant 2$.

证明 设 $n \geqslant 8$ 且 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准素因数分解式. 注意到: $\frac{p^\alpha}{\alpha+1} \geqslant 1, \frac{p^\alpha}{\alpha+1} \geqslant 2 (p \geqslant 3)$, 并且当 $\alpha \geqslant 3$ 时, $\frac{p^\alpha}{\alpha+1} \geqslant \frac{2^\alpha}{\alpha+1} \geqslant 2$. 所以分为以下几种情况来进行讨论:

(1) 如果有一个 $\alpha_i \geqslant 3$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 则有

$$\frac{n}{d(n)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{{p_i}^{\alpha_i}}{\alpha_i + 1} \geqslant \frac{2^3}{3+1} = 2.$$

(2) 如果 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \{\alpha_i\} = \alpha_j = 2$, 则当 $p_j \geqslant 3$ 时有

$$\frac{n}{d(n)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{{p_i}^{\alpha_i}}{\alpha_i + 1} \geqslant \frac{3^2}{2+1} > 2.$$

而当 $p_j = 2$ 时,n 至少有两个不同的素因子, 于是有

$$\frac{n}{d(n)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{{p_i}^{\alpha_i}}{\alpha_i + 1} \geqslant \frac{2^2}{2+1} \cdot \frac{3}{1+1} = 2.$$

(3) 如果 $\alpha_i = 1 (i = 1, 2, \cdots, k)$, 则 $n (\geqslant 8)$ 至少有一个素因子 $\geqslant 5$, 于是

$$\frac{n}{d(n)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{1+1} \geqslant \frac{5}{2} \geqslant 2.$$

综上立刻完成引理 3.8.3 的证明.

现在结合上述引理来完成定理的证明.

定理 3.8.1 *对任意正整数 n, 方程*

$$\sum_{d|n} S(d) = n$$

成立当且仅当 $n = 1, 28$.

证明 同样设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. 从 $S(n)$ 的定义容易看出 $n = 1$ 是方程 $\sum\limits_{d|n} S(d) = n$ 的一个解. 当 $n > 1$ 时, 分下列两种情况讨论:

(1) 如果 $k = 1$ 即 $n = p^\alpha$, 由引理 3.8.1, 该方程没有这种形式的解.

(2) 如果 $k \geqslant 2$, 当 $\alpha_1 = 1$ 时, 由引理 3.8.2, n 不是该方程的解.

当 $\alpha_1 \geqslant 2$ 时, 由 $S(n) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \{S(p_i^{\alpha_i})\} = S(p^\alpha)$, 可设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = p^\alpha m$ 且 $(m, p) = 1$, 下面来讨论 $m = 2, 3, 4, 5, 6$ 时方程 $\sum\limits_{d|n} S(d) = n$ 的解的情况:

当 $m=2$ 时, 即 $n=2p^{\alpha}$ $(p\geqslant 3)$, 由引理 3.8.2 知 $n=2p^{\alpha}$ 不是该方程的解.

当 $m=3$ 时, 即 $n=3p^{\alpha}$. 此时, 若 $p>3$,由引理 3.8.2 知 $n=3p^{\alpha}$ 不是该方程的解; 当 $p=2$ 即 $n=3\cdot 2^{\alpha}$ 时, 显然 $n=6$, 12 不满足方程 $\sum\limits_{d\mid n}S(d)=n$. 于是若 n 满足该方程, 则必须有 $\alpha\geqslant 3$, 那么

$$\sum_{d\mid n}S(d)=\sum_{d\mid 3\cdot 2^{\alpha}}S(d)=\sum_{d\mid 2^{\alpha}}S(d)+\sum_{d\mid 2^{\alpha}}S(3d)=2\sum_{d\mid 2^{\alpha}}S(d)+3\neq 3\cdot 2^{\alpha},$$

结合上述两种情况可以得出 $n=3p^{\alpha}$ 不是该方程的解.

当 $m=4$ 时, 即 $n=4p^{\alpha}$ $(p\geqslant 3)$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid n}S(d)=\sum_{d\mid 4p^{\alpha}}S(d)&=\sum_{d\mid p^{\alpha}}S(d)+\sum_{d\mid p^{\alpha}}S(2d)+\sum_{d\mid p^{\alpha}}S(4d)\\&=\begin{cases}3\sum\limits_{d\mid p^{\alpha}}S(d)+4=4p^{\alpha}, & p\geqslant 5,\\ 3\sum\limits_{d\mid 3^{\alpha}}S(d)+5\neq 4\cdot 3^{\alpha}, & p=3.\end{cases}\end{aligned}$$

而当 $p\geqslant 5$ 时有

$$3\sum_{\substack{d\mid p^{\alpha}\\ d>1}}S(d)+7=4p^{\alpha},$$

上式中 $p\mid \sum\limits_{\substack{d\mid p^{\alpha}\\ d>1}}S(d)$, $p\mid p^{\alpha}$, 所以 $p\mid 7$, 从而 $p=7$, 也就是说 $n=4\cdot 7=28$ 是方程的解.

当 $m=5$ 时, 即 $n=5p^{\alpha}$. 若 $p>5$ 时,由引理 3.8.2 知 $n=5p^{\alpha}$ 不是该方程的解; 当 $p=2$ 即 $n=5\cdot 2^{\alpha}$ 时, 显然 $n=10$, 20 不满足方程 $\sum\limits_{d\mid n}S(d)=n$. 于是若 n 满足该方程, 则必须有 $\alpha\geqslant 3$, 此时由于 $4\nmid 2+2\sum\limits_{\substack{d\mid 2^{\alpha}\\ d>1}}S(d)+8$, 所以

$$\sum_{d\mid n}S(d)=\sum_{d\mid 5\cdot 2^{\alpha}}S(d)=\sum_{d\mid 2^{\alpha}}S(d)+\sum_{d\mid 2^{\alpha}}S(5d)=2\sum_{d\mid 2^{\alpha}}S(d)+8\neq 5\cdot 2^{\alpha},$$

当 $p=3$, 即 $n=5\cdot 3^{\alpha}$ 时,显然 $n=15$, 45 不满足方程 $\sum\limits_{d\mid n}S(d)=n$. 于是同样若 n 满

足该方程, 则必须有 $\alpha \geqslant 3$, 此时由于 $3 \nmid 2 + 2\sum\limits_{\substack{d|3^\alpha \\ d>1}} S(d) + 6$, 所以

$$\sum_{d|n} S(d) = \sum_{d|5\cdot 3^\alpha} S(d) = \sum_{d|3^\alpha} S(d) + \sum_{d|3^\alpha} S(5d) = 2\sum_{d|3^\alpha} S(d) + 6$$
$$= 2 + 2\sum_{\substack{d|3^\alpha \\ d>1}} S(d) + 6 \neq 5 \cdot 3^\alpha.$$

从而就可以得出 $n = 5p^\alpha$ 不是该方程的解.

当 $m = 6$ 时, 即 $n = 6p^\alpha = 2 \cdot 3 \cdot p^\alpha$, 由引理 3.8.2, $n = 6p^\alpha$ 不是方程的解.

当 $m = 7$ 时, 即 $n = 7 \cdot p^\alpha$, 同样若 $p > 7$ 时,由引理 3.8.2 知 $n = 7p^\alpha$ 不是该方程的解; 当 $p = 2$ 即 $n = 7 \cdot 2^\alpha$ 时, 显然 $n = 14$ 不满足方程 $\sum\limits_{d|n} S(d) = n$. 当 $\alpha \geqslant 3$ 有

$$\sum_{d|n} S(d) = \sum_{d|7\cdot 2^\alpha} S(d) = \sum_{d|2^\alpha} S(d) + \sum_{d|2^\alpha} S(7d) = 2\sum_{d|2^\alpha} S(d) + 14 = 7 \cdot 2^\alpha.$$

此时当 $\alpha = 2$ 时上式成立, 但由于 $2^2 < 7$ 与 $S(n) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\} := S(p^\alpha)$ 矛盾; 当 $\alpha \geqslant 3$ 时, 有

$$7 \cdot 2^\alpha = \sum_{d|7\cdot 2^\alpha} S(d) = \sum_{d|7\cdot 2^\alpha} S(2^\alpha) < S(2^\alpha)d(7 \cdot 2^\alpha) < 4\alpha(\alpha+1),$$

用归纳法很容易证明当 $\alpha \geqslant 3$ 时, 不等式 $7 \cdot 2^{\alpha-2} < \alpha(\alpha+1)$ 是不可能的.

当 $p = 3$ 即 $n = 7 \cdot 3^\alpha$ 时, 显然 $n = 21,\ 63$ 不满足方程 $\sum\limits_{d|n} S(d) = n$. 而当 $\alpha \geqslant 3$ 时有

$$\sum_{d|n} S(d) = \sum_{d|7\cdot 3^\alpha} S(d) < S(3^\alpha)d(7 \cdot 3^\alpha) \leqslant 3\alpha \cdot 2(\alpha+1).$$

显然当 $\alpha \geqslant 3$ 时 $7 \cdot 3^\alpha < 6\alpha(\alpha+1)$ 是不可能的. 所以 $n = 7 \cdot 3^\alpha$ 不是原方程的解.

当 $p = 5$ 即 $n = 7 \cdot 5^\alpha$ 时, 显然 $n = 35$ 不满足方程 $\sum\limits_{d|n} S(d) = n$. 当 $\alpha \geqslant 2$, 有

$$\sum_{d|n} S(d) = \sum_{d|7\cdot 5^\alpha} S(d) = \sum_{d|5^\alpha} S(d) + \sum_{d|5^\alpha} S(7d) = 2\sum_{d|5^\alpha} S(d) + 8 \neq 7 \cdot 5^\alpha.$$

结合上述各种情况就可以得出 $n = 7p^\alpha$ 不是该方程的解.

如果 $m \geqslant 8$, 且 $n = mp^\alpha$ 满足方程 $\sum\limits_{d|n} S(d) = mp^\alpha$. 那么有

$$mp^\alpha = \sum_{d|mp^\alpha} S(d) < \sum_{d|mp^\alpha} S(p^\alpha) < S(p^\alpha)d(mp^\alpha)$$
$$= S(p^\alpha)d(p^\alpha)d(m) = S(p^\alpha)(\alpha+1)d(m),$$

即有不等式

$$\frac{S(p^\alpha)(\alpha+1)d(m)}{mp^\alpha} > 1.$$

这里用到了除数函数 $d(n)$ 的性质,它是一个可乘函数. 由引理 3.8.3, 当 $m \geqslant 8$ 时, $\dfrac{m}{d(m)} \geqslant 2$; 又 $\alpha \geqslant 3$ 时, 由 $S(n)$ 的性质有 $S(p^\alpha) \leqslant \alpha p$. 所以上述不等式即为

$$1 < \frac{S(p^\alpha)(\alpha+1)d(m)}{mp^\alpha} \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)p}{2p^\alpha},$$

而当 $\alpha \geqslant 4$ 或者 $\alpha \geqslant 3, p \geqslant 3$ 时, 不等式 $2p^\alpha < \alpha(\alpha+1)p$ 是不可能的. 从而可以得出结论: 当 $m \geqslant 8$ 时, 此方程无解.

现在结合 (1) 和 (2), 立刻得到方程

$$\sum_{d|n} S(d) = n$$

有且仅有两个解, 它们是 $n = 1,\ 28$.

于是完成了定理 3.8.1 的证明.

3.9 包含平方补数的方程

2.1 节定义了 n 的 k 次补数函数 $a_k(n)$, 即 $a_k(n)$ 表示能够使 $n \cdot a_k(n)$ 成为完全 k 次幂数的最小正整数. 特别对 $k = 2,3,4$, 称 $a_2(n)$ 为 n 的平方补数,$a_3(n)$ 为 n 的立方补数及 $a_4(n)$ 为 n 的四次方补数等. 例如, $a_2(1) = 1$, $a_2(2) = 2$, $a_2(3) = 3$, $a_2(4) = 1$, $a_2(5) = 5$, $a_2(6) = 6$, $a_2(7) = 7$, $a_2(8) = 2$, $a_2(9) = 1$, $\cdots$.

在此, 研究了一类包含平方补数函数方程的可解性, 证明了该方程有无穷多组正整数解. 即

定理 3.9.1 *设 m 为完全平方数, 那么对任意正整数 $k \geqslant 2$, 方程*

$$a_2(n_1) + a_2(n_2) + \cdots + a_2(n_k) = m \cdot a_2(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$$

有无穷多组正整数解 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$.

用初等方法及哥德巴赫猜想的结论来完成定理的证明. 为引用方便, 首先介绍陈景润定理及三素数定理的结论

陈景润定理 任意一个充分大的偶数 $2N$ 都可以表示成 $2N = p_1 + p_2$ 或者 $2N = p_1 + p_2p_3$，其中 p_1, p_2, p_3 为不同的素数.

三素数定理 任意一个充分大的奇数都可以表示成三个奇素数之和. 即 $2N+1 = p_1 + p_2 + p_3$，其中 p_1, p_2 及 p_3 为奇素数.

关于这两个著名定理的证明参阅文献 [24].

现在完成定理的证明: 由 $a_2(n)$ 的定义及性质显然有 $a_2(p_1) = p_1$, $a_2(p_1p_2) = p_1p_2$, $a_2(n^2p) = p$, 这里 p, p_1 及 p_2 为不同的素数. 由于 m 为完全平方数, 所以可设 $m = \mu^2$, 下面讨论 k 的不同情况.

(1) 当 $k = 2$ 时, 如果 μ 为奇数, 则 μ^2p 为奇数,$2\mu^2p$ 为偶数, 于是由陈景润定理, 当 $2\mu^2p$ 足够大时有 $2\mu^2p = p_1 + p_2$ 或者 $2\mu^2p = p_1 + p_2p_3$, 其中 p_1,p_2,p_3 为不同的素数. 于是取 $n_1 = p_1,n_2 = p_2$ 或者 $n_1 = p_1,n_2 = p_2p_3$, 则有

$$\mu^2a_2(n_1 + n_2) = \mu^2a_2(2\mu^2p) = \mu^2 \cdot 2p = n_1 + n_2 = a_2(n_1) + a_2(n_2).$$

由于 p 为任意充分大的素数, 所以 (n_1, n_2) 有无穷多组, 即原方程有无穷多组正整数解 (n_1, n_2). 因此, 定理的结论是正确的.

如果 μ 为偶数, 则 μ^2p 为偶数. 同样由陈景润定理可知当 μ^2p 足够大时有 $\mu^2p = p_1 + p_2$ 或者 $\mu^2p = p_1 + p_2p_3$. 因而有

$$\mu^2a_2(p_1 + p_2) = \mu^2a_2(\mu^2p) = \mu^2p = p_1 + p_2 = a_2(p_1) + a_2(p_2)$$

或者

$$\mu^2a_2(p_1 + p_2p_3) = \mu^2a(\mu^2p) = \mu^2p = p_1 + p_2p_3 = a_2(p_1) + a_2(p_2p_3),$$

即此时方程有无穷组正整数解.

(2) 当 $k = 3$ 时, 如果 μ 为奇数, 则 μ^2p 为奇数. 于是由三素数定理知对于足够大的奇素数 p 有 $\mu^2p = p_1 + p_2 + p_3$, 取 $n_1 = p_1,n_2 = p_2,n_3 = p_3$, 则有

$$\begin{aligned}\mu^2a_2(n_1 + n_2 + n_3) &= \mu^2a_2(p_1 + p_2 + p_3) = \mu^2a_2(\mu^2p)\\ &= \mu^2p = p_1 + p_2 + p_3\\ &= a_2(n_1) + a_2(n_2) + a_2(n_3).\end{aligned}$$

如果 μ 为偶数, 则 μ^2p 为偶数. 于是由陈景润定理可知对于足够大的素数 p 有 $\mu^2p = 2 + p_1 + p_2$ 或者 $\mu^2p = 2 + p_1 + p_2p_3$. 因而

$$\begin{aligned}\mu^2a_2(2 + p_1 + p_2) &= \mu^2a_2(\mu^2p) = \mu^2p = 2 + p_1 + p_2\\ &= a_2(2) + a_2(p_1) + a_2(p_2)\end{aligned}$$

或者

$$\mu^2 a_2(2+p_1+p_2p_3)=\mu^2 a_2(\mu^2 p)=\mu^2 p=2+p_1+p_2p_3$$
$$=a_2(2)+a_2(p_1)+a_2(p_2p_3),$$

即此时方程也有无穷组正整数解 (n_1,n_2,n_3).

(3) 当 $k>3$ 时, 分两种情况讨论:

(a) 如果 μ 为奇数, 则 μ^2p 为奇数. 于是当 k 为奇数时, 对充分大的素数 p, μ^2p 也足够大, 由三素数定理 (推广形式为: 设 $k\geqslant 3$ 为奇数, 则任意充分大的奇数都可以表示成 k 个奇素数之和) 不难得到 $\mu^2p=p_1+p_2+\cdots+p_k$. 因而有

$$\mu^2 a_2(p_1+p_2+\cdots+p_k)=\mu^2 a_2(\mu^2 p)=\mu^2 p=p_1+p_2+\cdots+p_k$$
$$=a_2(p_1)+a_2(p_2)+\cdots+a_2(p_k).$$

此时取 $n_1=p_1,n_2=p_2,\cdots,n_k=p_k$, 并注意素数 p 的任意性即可得定理 3.9.1.

如果 k 为偶数, 则当 μ^2p 足够大时, 同样由三素数定理的推广形式容易得到 $\mu^2p=2+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}$. 于是

$$\begin{aligned}&\mu^2 a_2(2+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1})\\&=\mu^2 a_2(\mu^2 p)=\mu^2 p=2+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}\\&=a_2(2)+a_2(p_1)+a_2(p_2)+\cdots+a_2(p_{k-1}).\end{aligned}$$

取 $n_1=2,n_2=p_1,\cdots,n_k=p_{k-1}$ 得到定理 3.9.1 的结论. 即此时方程仍然有无穷组正整数解 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$.

(b) 如果 μ 为偶数,μ^2p 也为偶数. 于是当 k 为偶数时, 对充分大的 μ^2p, 设 $\mu^2p=3+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}$. 因而

$$\begin{aligned}&\mu^2 a_2(3+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1})\\&=\mu^2 a_2(\mu^2 p)=\mu^2 p=3+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}\\&=a_2(3)+a_2(p_1)+a_2(p_2)+\cdots+a_2(p_{k-1}).\end{aligned}$$

如果 k 为奇数, 则当 μ^2p 足够大时可设 $\mu^2p=2+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}$, 则

$$\begin{aligned}&\mu^2 a_2(2+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1})\\&=\mu^2 a_2(\mu^2 p)=\mu^2 p=2+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}\\&=a_2(2)+a_2(p_1)+a_2(p_2)+\cdots+a_2(p_{k-1}),\end{aligned}$$

即方程有无穷组正整数解 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$.

结合以上各种情况完成了定理 3.9.1 的证明.

第 4 章　不等式和恒等式

第 1、第 2 两章主要介绍了应用初等或解析的方法来研究数论函数的均值问题，但对于大多数问题而言，不仅仅局限于只给出数论函数的均值估计，而是期望得到更好更精确的计算公式及广泛的算术性质，本章主要通过一些数论函数的恒等式或不等式关系来说明研究这些性质的基本方法.

4.1　因子乘积与真因子乘积序列

设 n 是一正整数，$p_d(n)$ 表示 n 的所有正因子的乘积，即 $p_d(n)=\prod\limits_{d|n} d$. 例如，$p_d(1)=1, p_d(2)=2, p_d(3)=3, \cdots, p_d(p)=p$. $q_d(n)$ 表示 n 的所有真因子的乘积，即 $q_d(n)=\prod\limits_{d|n, d<n} d$. 例如，$q_d(1)=1, q_d(2)=1, q_d(3)=1, \cdots, q_d(p)=1$, 在文献 [1] 中的第 25 和 26 个问题里，Smarandache 教授建议研究这两个序列的性质. 本节利用初等的方法研究这两个序列的一个性质，证明 Makowsiki 和 Schinzel 猜想在序列 $p_d(n)$ 和 $q_d(n)$ 的一个推广.

引理 4.1.1　*对任意的正整数 n 有*

$$p_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}} q_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}-1.$$

证明　参阅文献 [25].

引理 4.1.2　*对任意的正整数 n，设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，且 $\alpha_i \geqslant 2(1\leqslant i\leqslant s)$. $p_j(1\leqslant j\leqslant s)$ 为不同的素数满足 $p_1<p_2\cdots<p_s$，则对任意的正整数 k，有*

$$\sigma_k(\varphi(n)) \geqslant \varphi^k(n)\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p^k}\right).$$

证明　由 Euler 函数的性质有

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=\varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2})\cdots\varphi(p_s^{\alpha_s})\\&=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1).\end{aligned}\tag{4-1}$$

设 $(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta 2}\cdots p_s^{\beta_s}q_1^{\gamma_1}q_2^{\gamma_2}\cdots q_s^{\gamma_t}$，其中 $\beta_i\geqslant 0, \gamma_j\geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant s,\ 1\leqslant j\leqslant t)$, $q_1<q_2<\cdots<q_t$ 是不同的素数.

注意到对任意的 $k>0$

$$\sigma_k(p^{\alpha})=1^k+2^k+\cdots+p^{k\alpha}=\frac{p^{k(\alpha+1)}-1}{p^k-1},$$

由式 (4-1)

$$\begin{aligned}
\sigma_k(\varphi(n))&=\sigma_k(p_1^{\alpha_1+\beta_1-1}p_2^{\alpha_2+\beta_2-1}\cdots p_s^{\alpha_s+\beta_s-1}q_1^{\gamma_1}q_2^{\gamma_2}\cdots q_s^{\gamma_t})\\
&=\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i^{k(\alpha_i+\beta_i)}-1}{p_i^k-1}\prod_{j=1}^{t}\frac{q_j^{k(\gamma_i+1)}-1}{q_j^k-1}\\
&=p_1^{k(\alpha_1+\beta_1)}p_2^{k(\alpha_2+\beta_2)}\cdots p_s^{k(\alpha_s+\beta_s)}q_1^{k\gamma_1}q_2^{k\gamma_2}\cdots q_s^{k\gamma_t}\\
&\quad\times\prod_{i=1}^{s}\frac{1-\dfrac{1}{p_i^{k(\alpha_i+\beta_i)}}}{p_i^k-1}\prod_{j=1}^{t}\frac{1-\dfrac{1}{q_j^{k(\gamma_j+1)}}}{1-\dfrac{1}{q_j^k}}\\
&=n^k\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^k\prod_{i=1}^{s}\frac{1-\dfrac{1}{p_i^{k(\alpha_i+\beta_i)}}}{1-\dfrac{1}{p_i^k}}\prod_{j=1}^{t}\frac{1-\dfrac{1}{q_j^{k(\gamma_j+1)}}}{1-\dfrac{1}{q_j^k}}.
\end{aligned}$$

因为

$$\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right),\tag{4-2}$$

则由上两式有

$$\begin{aligned}
\sigma_k(\varphi(n))&=n^k\frac{\varphi^k(n)}{n^k}\prod_{i=1}^{s}\frac{1-\dfrac{1}{p_i^{k(\alpha_i+\beta_i)}}}{1-\dfrac{1}{p_i^k}}\prod_{j=1}^{t}\frac{1-\dfrac{1}{q_j^{k(\gamma_j+1)}}}{1-\dfrac{1}{q_j^k}}\\
&=\varphi^k(n)\prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{p_i^k}+\cdots+\frac{1}{p_i^k(\alpha_i+\beta_i)-1}\right)\\
&\quad\times\prod_{j=1}^{t}\left(1+\frac{1}{q_j^k}+\cdots+\frac{1}{q_j^{k(\gamma_j+1)}-1}\right)\\
&\geqslant\varphi^k(n)\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p^k}\right).
\end{aligned}$$

于是完成了引理 4.1.2 的证明.

定理 4.1.1 设 $n=p^{\alpha}$, p 是一个素数, α 为一正整数, 则对任意正整数 k, 有不等式

$$\sigma_k(\varphi(p_d(n)))\geqslant\frac{1}{2^k}p_d^k(n),$$

其中 $\sigma_k(n) = \prod\limits_{d|n} d^k$.

定理 4.1.2 设 $n = p^\alpha$, p 是一个素数, α 为一正整数, 则对任意正整数 k, 有不等式

$$\sigma_k(\varphi(q_d(n))) \geqslant \frac{1}{2^k} q_d^k(n).$$

证明 先证明定理 4.1.1. 分两种情况来讨论

(1) 如果 n 是一个素数, 则 $d(n) = 2$. 由引理 4.1.1 有

$$P_d(n) = n^{\frac{d(n)}{2}} = n. \tag{4-3}$$

注意到 $\varphi(n) = n - 1$, 则由 (4-2)、(4-3) 可得

$$\begin{aligned}\sigma_k(\varphi(P_d(n))) &= \sigma_k(n-1) = \sum_{d|(n-1)} d^k \geqslant (n-1)^k \\ &\geqslant \frac{1}{2^k} n^k = \frac{1}{2^k} P_d^k(n).\end{aligned}$$

(2) 如果 $n = p^\alpha$, p 是一素数, 且 $\alpha > 1$ 是任意的正整数, 则 $d(n) = \alpha + 1$. 因此

$$P_d(n) = n^{\frac{d(n)}{2}} = p^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}.$$

应用引理 4.1.2 及上式, 可有

$$\begin{aligned}\sigma_k(\varphi(P_d(n))) &= \sigma_k\left(\varphi^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}\right) \\ &\geqslant \varphi^k(p^{\alpha(\alpha+1)}) \prod_{p_1|p^{\alpha(\alpha+1)}} \left(1 + \frac{1}{p_1^k}\right) \\ &= p^{k\alpha(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k \left(1 + \frac{1}{p_1^k}\right) \\ &\geqslant p^{k\alpha(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k \\ &\geqslant p^{k\alpha(\alpha+1)} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^k} P_d^k(n).\end{aligned}$$

于是完成了定理 4.1.1 的证明.

利用同样的方法, 也可给出定理 4.1.2 的证明, 即

(1) 如果 n 是一个素数, 则 $d(n) = 2$. 由引理 4.1.1 有

$$q_d(n) = n^{\frac{d(n)}{2} - 1} = 1,$$

因此

$$\sigma_k(\varphi(q_d(n))) = \sigma_k(1) = 1 \geqslant \frac{1}{2^k} P_d^k(n).$$

(2) 如果 $n = p^\alpha$, p 是一素数, 且 $\alpha > 1$ 是任意的正整数, 则 $d(n) = \alpha + 1$. 因此

$$q_d(n) = n^{\frac{d(n)}{2}-1} = p^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}}.$$

利用引理 4.1.2 和上式, 有

$$\sigma_k(\varphi(q_d(n))) = \sigma_k\left(\varphi\left(p^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2^k} P_d^k(n).$$

于是完成了定理 4.1.2 的证明.

4.2 Smarandache 问题中的第 57 个问题

本节内容用初等方法解决了文献 [1] 中的第 57 个问题, 并给出了精确的下界. 即为下面的结论

定理 4.2.1 *对充分大的正整数 n, 设 r 为一正整数满足集合 $\{1, 2, \cdots, r\}$ 可被分为 n 类且每一类都不能够包含正整数 x, y, z, 使得 $x^y = z$, 则有*

$$r \geqslant (n^{n!} + 2)^{n^n!+1} - 1.$$

证明 设 $r = (n^{n!}+2)^{n^n!+1} - 1$ 且按如下方法将集合 $\{1, 2, \cdots, (n^{n!}+2)^{n^n!+1} - 1\}$ 分为 n 类:

第一类: 1, $n^{n!}+1$, $n^{n!}+2$, $\cdots$, $(n^{n!}+2)^{n^{n!}+1} - 1$;
第二类: 2, $n+1$, $n+2$, $\cdots$, n^2;
$\cdots\cdots$
第 k 类: k, $n^{(k-1)!}+1$, $n^{(k-1)!}+2$, $\cdots$, $n^{k!}$;
$\cdots\cdots$
第 n 类: n, $n^{(n-1)!}+1$, $n^{(n-1)!}+2$, $\cdots$, $n^{n!}$.

显然第 $k(k \geqslant 2)$ 类不包含正整数满足 $x^y = z$.

事实上, 对属于第 k ($k = 2, 3, \cdots, n$) 类的任意正整数 x, y, z, 有

$$x^y \geqslant \left(n^{(k-1)!}+1\right)^k > n^{k!} \geqslant z.$$

同样地, 第一类也不包含正整数 x, y, z 满足 $x^y = z$. 于是完成了定理 4.2.1 的证明.

4.3 关于 Smarandache LCM 比例序列的等式

设 $r>1$ 为正整数. 对任意的正整数 n, 令 $T(r,n)=\dfrac{[n,n+1,\cdots,n+r-1]}{(1,2,\cdots,r)}$, 则序列 $\mathrm{SLR}(r)=\{T(r,n)\}_\infty$ 称为 r 次 Smarandache LCM 比例序列. Le Maohua(参阅文献 [25]) 研究了该数列的性质, 并给出了 SLR(3) 和 SLR(4) 的归纳公式. 本节给出这个问题的推广.

引理 4.3.1 对任意的正整数 a 和 b, 有 $(a,b)[a,b]=ab$.

引理 4.3.2 对任意的正整数 s 和 t, $s<t$, 有

$$(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_t)=((x_1,\cdots,x_s),(x_{s+1},\cdots,x_t))$$

和

$$[x_1,x_2,x_3,\cdots,x_t]=[[x_1,\cdots,x_s],[x_{s+1},\cdots,x_t]].$$

引理 4.3.3 对任意的正整数 n, 有

$$T(4,n)=\begin{cases}\dfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3), & n\equiv 1,2(\mathrm{mod}\ 3),\\ \dfrac{1}{72}n(n+1)(n+2)(n+3), & n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3).\end{cases}$$

引理 4.3.4 对任意的正整数 n, 有

$$T(5,n)=\begin{cases}\dfrac{1}{1440}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\equiv 0,8(\mathrm{mod}\ 12),\\ \dfrac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\equiv 1,7(\mathrm{mod}\ 12),\\ \dfrac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\equiv 2,6(\mathrm{mod}\ 12),\\ \dfrac{1}{360}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\equiv 3,5,9,11(\mathrm{mod}\ 12),\\ \dfrac{1}{480}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\equiv 4(\mathrm{mod}\ 12),\\ \dfrac{1}{240}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\equiv 10(\mathrm{mod}\ 12).\end{cases}$$

引理 4.3.1、引理 4.3.2 的证明参阅文献 [3], 引理 4.3.3 的证明参阅文献 [23], 引理 4.3.4 的证明参阅文献 [24].

下面利用上述引理来证明以下几个定理.

定理 4.3.1 对任意的正整数 n, 有下列归纳等式:

当 $n \equiv 0, 15 \pmod{20}$ 时,

$$T(6,n) = \frac{1}{7200} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5);$$

当 $n \equiv 1, 2, 6, 9, 13, 14, 17, 18 \pmod{20}$ 时,

$$T(6,n) = \frac{1}{720} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5);$$

当 $n \equiv 5, 10 \pmod{20}$ 时,

$$T(6,n) = \frac{1}{360} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5);$$

当 $n \equiv 3, 4, 7, 8, 11, 12, 16, 19 \pmod{20}$ 时,

$$T(6,n) = \frac{1}{1440} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

证明　事实上, 由最小公倍数的性质

$$\begin{aligned}
&[n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5] \\
=&[[n, n+1, n+2, n+3, n+4], n+5] \\
=&\frac{[n, n+1, n+2, n+3, n+4](n+5)}{([n, n+1, n+2, n+3, n+4], n+5)}.
\end{aligned}$$

注意到 $[1,2,3,4,5,6] = 60$, $[1,2,3,4,5] = 60$ 和

$$\begin{aligned}
&([n, n+1, n+2, n+3, n+4], n+5) \\
=&\begin{cases}
5, & n \equiv 0, 20, 30, 50 \pmod{60}, \\
6, & n \equiv 1, 13, 31, 49 \pmod{60}, \\
1, & n \equiv 2, 6, 8, 12, 14, 18, 24, 26, 32, 36, 38, 42, 44, 48, 54, 56 \pmod{60}, \\
4, & n \equiv 3, 11, 23, 27, 39, 47, 51, 59 \pmod{60}, \\
3, & n \equiv 4, 16, 22, 28, 34, 46, 52, 58 \pmod{60}, \\
10, & n \equiv 5, 45 \pmod{60}, \\
12, & n \equiv 7, 19, 31, 43 \pmod{60}, \\
2, & n \equiv 9, 17, 21, 29, 33, 37, 41, 53, 57 \pmod{60}, \\
15, & n \equiv 10, 40 \pmod{60}, \\
20, & n \equiv 15, 35 \pmod{60}, \\
30, & n \equiv 25 \pmod{60}, \\
60, & n \equiv 55 \pmod{60},
\end{cases}
\end{aligned}$$

则由引理 4.3.3 就可得到定理 4.3.1 的证明.

定理 4.3.2 对任意的正整数 n, 有

当 $n \equiv 0, 24, 30, 54 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n) = \frac{1}{302400}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6);$$

当 $n \equiv 1, 13, 17, 37, 41, 53 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n) = \frac{1}{5040}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6);$$

当 $n \equiv 2, 8, 16, 22, 26, 28, 32, 38, 46, 52, 56, 58 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n) = \frac{1}{20160}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6);$$

当 $n \equiv 3, 27, 51 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n) = \frac{1}{30240}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6);$$

当 $n \equiv 4, 10, 14, 20, 34, 40, 44, 50 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n) = \frac{1}{100800}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6);$$

当 $n \equiv 5, 25, 29, 49 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n) = \frac{1}{25200}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6);$$

当 $n \equiv 6, 12, 18, 36, 42, 48 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n) = \frac{1}{60480}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6);$$

当 $n \equiv 7, 11, 23, 31, 43, 47 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n) = \frac{1}{10080}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6);$$

当 $n \equiv 9, 45 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n) = \frac{1}{75600}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6);$$

当 $n \equiv 15, 39 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n) = \frac{1}{151200}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6);$$

当 $n \equiv 19, 35, 55, 59 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n) = \frac{1}{50400}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6);$$

当 $n \equiv 21, 33, 57 \pmod{60}$ 时,

$$T(7,n)=\frac{1}{15120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6).$$

证明　与定理 4.3.1 的证明方法相同, 略去.

定理 4.3.3　对任意的自然数 n 和 r, 有恒等式

$$T(r+1,n)=\frac{n+r}{r+1}\frac{([1,2,\cdots,r],r+1)}{([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)}T(r,n).$$

特别地, 当 $r+1$ 和 $n+r$ 都是素数时,

$$T(r+1,n)=\frac{n+r}{r+1}T(r,n).$$

证明　根据 $T(r,n)$ 的定义, 由引理 4.3.1 和引理 4.3.2, 有

$$\begin{aligned}
T(r+1,n)&=\frac{[n,n+1,\cdots,n+r]}{[1,2,\cdots,r+1]}\\
&=\frac{[[n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r]}{[[1,2,\cdots,r],r+1]}\\
&=\frac{\dfrac{(n+r)[n,n+1,\cdots,n+r-1]}{([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)}}{\dfrac{(r+1)[1,\cdots,r]}{([1,2,\cdots,r],r+1)}}\\
&=\frac{n+r}{r+1}\frac{[n,n+1,\cdots,n+r-1]}{[1,2,\cdots,r]}\\
&\quad\cdot\frac{([1,2,\cdots,r],r+1)}{([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)}\\
&=\frac{n+r}{r+1}\frac{([1,2,\cdots,r],r+1)}{([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)}T(r,n).
\end{aligned}$$

显然当 $r+1$ 和 $n+r$ 都是素数时, 可得

$$T(r+1,n)=\frac{n+r}{r+1}T(r,n).$$

因为这时

$$([1,2,\cdots,r],r+1)=1$$

和

$$([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)=1.$$

于是完成定理 4.3.3 的证明.

定理 4.3.4 对任意的自然数 n 和 r, 有恒等式

$$T(r,n+1)=\frac{n+r}{n}\frac{(n,[n+1,\cdots,n+r])}{([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)}T(r,n).$$

特别地, 当 n 和 $n+r$ 都是素数时且 $r<n$,

$$T(r,n+1)=\frac{n+r}{n}T(r,n);$$

当 n 和 $n+r$ 都是素数时且 $r\geqslant n$,

$$T(r,n+1)=(n+r)T(r,n).$$

证明 根据 $T(r,n)$ 的定义,

$$\begin{aligned}T(r,n+1)&=\frac{[n+1,\cdots,n+r]}{[1,2,\cdots,r]}\\&=\frac{[n,n+1,\cdots,n+r](n,[n+1,\cdots,n+r])}{n}\frac{1}{[1,2,\cdots,r]}\\&=\frac{(n,[n+1,\cdots,n+r])}{n[1,2,\cdots,r]}\frac{[n,n+1,\cdots,n+r-1](n+r)}{([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)}\\&=\frac{n+r}{n}\frac{(n,[n+1,\cdots,n+r])}{([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)}\frac{[n,n+1,\cdots,n+r-1]}{[1,2,\cdots,r]}\\&=\frac{n+r}{n}\frac{(n,[n+1,\cdots,n+r])}{([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)}T(r,n).\end{aligned}$$

显然当 n 和 $n+r$ 都是素数且 $n<r$, 仍有

$$T(r,n+1)=\frac{n+r}{n}T(r,n);$$

当 n 和 $n+r$ 都是素数且 $n\geqslant r$, 注意到 $(n,[n+1,\cdots,n+r])=n$, 则有

$$T(r,n+1)=(n+1)T(r,n).$$

于是完成了定理 4.3.4 的证明.

定理 4.3.5 对任意的自然数 n 和 r, 有恒等式

$$\begin{aligned}T(r+1,n+1)=&\frac{n+r}{n}\frac{n+r+1}{r+1}\frac{([1,2,\cdots,r],r+1)}{([n,n+1,\cdots,n+r],n+r+1)}\\&\times\frac{(n,[n+1,\cdots,n+r])}{([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)}T(r,n).\end{aligned}$$

证明　由定理 4.3.3 和定理 4.3.4 的结果, 易得下面恒等式:

$$
\begin{aligned}
T(r+1,n+1)=&\frac{n+r+1}{r+1}\frac{([1,2,\cdots,r],r+1)}{([n+1,\cdots,\cdots,n+r],n+r+1)}T(r,n+1)\\
=&\frac{(n+r+1)(n+r)}{n(r+1)}\frac{([1,2,\cdots,r],r+1)}{([n+1,\cdots,n+r],n+r+1)}\\
&\times\frac{(n,[n+1,\cdots,n+r])}{([n,\cdots,n+r-1],n+r)}T(r,n).
\end{aligned}
$$

于是完成了定理 4.3.5 的证明.

4.4　关于 k 次补数的恒等式

定义 2.1.1 给出了 k 次补数的定义. 本节讨论关于 k 次补数的几个恒等式. 首先介绍 Möbius 函数 $\mu(n)$.

定义 4.4.1　Möbius 函数 $\mu(n)$ 定义如下:

$$\mu(1)=1;$$

当 $n>1$ 时, 记 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$. 有

$$\mu(n)=\begin{cases}(-1)^k, & \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Möbius 函数 $\mu(n)$ 有如下重要等式 (参阅文献 [3]):

引理 4.4.1　当 $n\geqslant 1$ 时,

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\left[\frac{1}{n}\right]=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n>1.\end{cases}$$

定理 4.4.1　对任意的复数 α,β 且 $\mathrm{Re}(\alpha)\geqslant 1$, $\mathrm{Re}(\beta)\geqslant 1$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}a_k^{\beta}(n)}=\zeta(k\alpha)\prod_p\left(1+\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta}-1}\right).$$

证明　对任意的正整数 n, 令 $n=m^kl$, 其中 l 是无 k 次因子数, 由 $a_k(n)$ 的

定义

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}a_k^{\beta}(n)}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{d^k|l}\mu(d)}{m^{k\alpha}l^{\alpha}l^{(k-1)\beta}}=\zeta(k\alpha)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{d^k|l}\mu(d)}{l^{\alpha+(k-1)\beta}}$$

$$=\zeta(k\alpha)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{\alpha+(k-1)\beta}}+\frac{1}{p^{2(\alpha+(k-1)\beta)}}+\cdots+\frac{1}{p^{(k-1)(\alpha+(k-1)\beta)}}\right)$$

$$=\zeta(k\alpha)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{\alpha+(k-1)\beta}}\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)(\alpha+(k-1)\beta)}}}{1-\dfrac{1}{p^{\alpha+(k-1)\beta}}}\right)$$

$$=\zeta(k\alpha)\prod_p\left(1+\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta}-1}\right).$$

于是完成了定理 4.4.1 的证明.

定理 4.4.2 对任意的复数 α,β 且 $\mathrm{Re}(\alpha)\geqslant 1$, $\mathrm{Re}(\beta)\geqslant 1$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}a_k^{\beta}(n)}$$

$$=\left(1-\frac{2(2^{k\alpha}-1)(2^{\alpha+(k+1)\beta}-1)}{2^{(k+1)\alpha+(k-1)\beta}-2^{\alpha-(k-1)^2\beta}}\right)\zeta(k\alpha)\prod_p\left(1+\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta}-1}\right).$$

证明 首先

$$\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}a_k^{\beta}(n)}=\sum_{\substack{m=1\\2\nmid m^k l}}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{d^k|l}\mu(d)}{m^{k\alpha}l^{\alpha}l^{(k-1)\beta}}=\sum_{\substack{m=1\\2\nmid m}}^{\infty}\frac{1}{m^{k\alpha}}\sum_{\substack{l=1\\2\nmid l}}^{\infty}\frac{\sum\limits_{d^k|l}\mu(d)}{l^{\alpha+(k-1)\beta}}$$

$$=\frac{2^{k\alpha}-1}{2^{k\alpha}}\frac{\zeta(k\alpha)(2^{\alpha+(k-1)\beta}-1)}{2^{\alpha+(k-1)\beta}-2^{(k-1)(\alpha+(k-1)\beta)}}\prod_p\left(1+\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta}-1}\right)$$

$$=\frac{\zeta(k\alpha)(2^{k\alpha}-1)(2^{\alpha+(k-1)\beta}-1)}{2^{(k+1)\alpha+(k-1)\beta}-2^{(k-1)^2\beta-\alpha}}\prod_p\left(1+\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta}-1}\right).$$

结合定理 4.4.1 的结论, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha a_k^\beta(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha a_k^\beta(n)}-2\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha a_k^\beta(n)}$$

$$=\left(1-\frac{2(2^{k\alpha}-1)(2^{\alpha+(k-1)\beta}-1)}{2^{(k+1)\alpha+(k-1)\beta}-2^{(k-1)^2\beta-\alpha}}\right)\zeta(k\alpha)\prod_p\left(1+\frac{1-\dfrac{1}{p^{(k-1)\alpha+(k-1)^2\beta}}}{p^{\alpha+(k-1)\beta}-1}\right).$$

于是完成了定理 4.4.2 的证明.

定理 4.4.3 对任意的正整数 $k\geqslant 2$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na_k(n)}=\frac{2^k-k-1}{2^k+k-1}\zeta(k)\prod_p\left(1+\frac{k-1}{p^k}\right).$$

证明 对任意的正整数 n, 分成两类: $2\nmid n$, $2|n$ 和 $2^k\nmid n$, $2^k|n$. 由 $a_k(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na_k(n)}&=\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{+\infty}\frac{1}{na_k(n)}-\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{k-1}\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{+\infty}\frac{1}{(2^{\alpha k+\beta}n)a_k(2^{\alpha k+\beta}n)}\\&\quad-\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{+\infty}\frac{1}{(2^{\alpha k}n)a_k(2^{\alpha k}n)}\\&=\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{+\infty}\frac{1}{na_k(n)}-\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{k-1}\frac{1}{2^{(\alpha+1)k}}\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{+\infty}\frac{1}{na_k(n)}\\&\quad-\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k\alpha}}\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{+\infty}\frac{1}{na_k(n)}\\&=\frac{2^k-k-1}{2^k-1}\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{+\infty}\frac{1}{na_k(n)}.\end{aligned}$$

显然无穷级数 $\sum\limits_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{+\infty}\frac{1}{na_k(n)}$ 是绝对收敛的, 所以由 Euler 乘积公式可得

$$\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{+\infty}\frac{1}{na_k(n)}=\prod_{\substack{p\\p\neq 2}}\left(1+\frac{1}{pa_k(p)}+\frac{1}{p^2a_k(p^2)}+\cdots\right)=\prod_{\substack{p\\p\neq 2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{p^la_k(p^l)}$$

$$=\prod_{\substack{p\\p\neq 2}}\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{k-1}\frac{1}{p^{\alpha k+\beta}a_k(p^{\alpha k+\beta})}+\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{p^{\alpha k}a_k(p^{\alpha k})}\right)$$

$$=\prod_{\substack{p\\p\neq 2}}\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{k-1}\frac{1}{p^{(\alpha+1)k}}+\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{p^{\alpha k}}\right)$$

$$=\prod_{\substack{p\\p\neq 2}}\frac{p^k+k-1}{p^k-1}=\prod_{p}\frac{1+\dfrac{k-1}{p^k}}{1-\dfrac{1}{p^k}}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{2^k}}{1+\dfrac{k-1}{2^k}}$$

$$=\frac{2^k-1}{2^k+k-1}\zeta(k)\prod_{p}\left(1+\frac{k-1}{p^k}\right),$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na_k(n)}=\frac{2^k-k-1}{2^k+k-1}\zeta(k)\prod_{p}\left(1+\frac{k-1}{p^k}\right).$$

注意到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$ 和 $\zeta(8)=\dfrac{\pi^8}{9450}$, 则由上面的定理可得到下面的推论:

推论 4.4.1 在上面的定理中取 $\beta=\alpha$, $k=2$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_2(n))^{\alpha}}=\frac{\zeta^2(2\alpha)}{\zeta(4\alpha)},$$

$$\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{(na_2(n))^{\alpha}}=\frac{\zeta^2(2\alpha)}{\zeta(4\alpha)}\frac{4^{\alpha}-1}{4^{\alpha}+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(na_2(n))^{\alpha}}=\frac{\zeta^2(2\alpha)}{\zeta(4\alpha)}\frac{3-4^{\alpha}}{4^{\alpha}+1}.$$

推论 4.4.2 在推论 4.4.1 中取 $\alpha=\beta=1, 2$, $k=2$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na_2(n)}=\frac{5}{2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na_2(n))^2}=\frac{7}{6},$$

$$\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{na_2(n)}=\frac{3}{2},\quad \sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{(na_2(n))^2}=\frac{35}{34},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na_2(n)}=-\frac{1}{2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(na_2(n))^2}=-\frac{91}{102}.$$

在定理中取 $k=2$, 结合

$$\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^4}\right)\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}=\frac{\zeta(2)}{\zeta(4)},$$

则可得到下面的推论:

推论 4.4.3 对任意的平方补数 $a_2(n)$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na_2(n)}=\frac{1}{2}.$$

推论 4.4.4 对任意的立方补数 $a_3(n)$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na_3(n)}=\frac{2}{5}\zeta(3)\prod_{p}\left(1+\frac{2}{p^3}\right).$$

4.5 关于 Smarandache ceil 函数及其对偶函数的恒等式

首先给出 Smarandache ceil 函数及其对偶函数的定义.

定义 4.5.1 对任意的正整数 n, k 次 Smarandache ceil 函数为

$$S_k(n)=\min\{x\in\mathbf{N}:n|x^k\}.$$

例如, $S_2(1)=1$, $S_2(2)=2$, $S_2(3)=3$, $S_2(4)=2$, $S_2(5)=5$, $S_2(6)=6$, $S_2(7)=7,\cdots$, $S_3(1)=1$, $S_3(2)=2$, $S_3(3)=3$, $S_3(4)=2$, $S_3(5)=5$, $S_3(6)=6$, $S_3(7)=7$, $S_3(8)=2,\cdots$.

定义 4.5.2 函数 $S_k(n)$ 的对偶函数为

$$\overline{S}_k(n)=\max\{x\in\mathbf{N}:x^k|n\}$$

例如, $\overline{S}_2(1)=1$, $\overline{S}_2(2)=1$, $\overline{S}_2(3)=1$, $\overline{S}_2(4)=2,\cdots$.

对任意的素数 $p,q,p\neq q$, $\overline{S}_2(p^2)=p$, $\overline{S}_2(p^{2m+1})=p^m$, $\overline{S}_2(p^mq^n)=\overline{S}_2(p^m)\overline{S}_2(q^n)$.

Ibstedt 证明了 Smarandache ceil 函数的可乘性 (参阅文献 [26], [27]), 即

$$(a,b)=1\Rightarrow S_k(ab)=S_k(a)S_k(b),$$

$$S_k(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r})=S_k(p_1^{\alpha_1})S_k(p_2^{\alpha_2})\cdots S_k(p_r^{\alpha_r}).$$

本节将给出关于 Smarandache ceil 函数及其对偶函数的一些恒等式.

定理 4.5.1 对任意的实数 $\alpha>1$ 和整数 $k\geqslant 2$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{S_k^\alpha(n)}=\frac{2^\alpha-k-1}{2^\alpha+k-1}\prod_{p}\left(1+\frac{k}{p^\alpha-1}\right).$$

证明 对任意的实数 $\alpha>1$, 令

$$f(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{S_k^{\alpha}(n)}.$$

由 $S_k(n)$ 的可乘性, 有

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_k^{\alpha}(2n-1)}-\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_k^{\alpha}(2n-1)S_k^{\alpha}(2^t)}\\&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_k^{\alpha}(2n-1)}\right)\left(1-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{S_k^{\alpha}(2^t)}\right).\end{aligned}$$

对任意的素数 p, 注意到 $S_k(p)=p$, $S_k(p^2)=p$, $\cdots$, $S_k(p^k)=p$, $S_k(p^{k+1})=p^2$, 对任意的整数 $t\geqslant 0$, $1\leqslant r\leqslant k$, $S_k(p^{tk+r})=p^{t+1}$.

由 Euler 乘积公式有

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_k^{\alpha}(2n-1)}\right)&=\prod_{\substack{p\\p\neq 2}}\left(1+\frac{1}{S_k^{\alpha}(p)}+\frac{1}{S_k^{\alpha}(p^2)}+\cdots+\frac{1}{S_k^{\alpha}(p^k)}+\cdots\right)\\&=\prod_{\substack{p\\p\neq 2}}\left(1+\frac{k}{p^{\alpha}}+\frac{k}{p^{2\alpha}}+\cdots+\frac{k}{p^{n\alpha}}+\frac{k}{p^{(n+1)\alpha}}+\cdots\right)\\&=\prod_{\substack{p\\p\neq 2}}\left(1+\frac{k}{p^{\alpha}-1}\right)\\&=\frac{2^{\alpha}-1}{2^{\alpha}+k-1}\prod_{p}\left(1+\frac{k}{p^{\alpha}-1}\right).\end{aligned}$$

同理有

$$1-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{S_k^{\alpha}(2^t)}=1-\frac{k}{2^{\alpha}-1}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{S_k^{\alpha}(n)}=\frac{2^{\alpha}-k-1}{2^{\alpha}+k-1}\prod_{p}\left(1+\frac{k}{p^{\alpha}-1}\right).$$

于是完成了定理 4.5.1 的证明.

定理 4.5.2 对任意的实数 $\alpha>1$ 和整数 $k\geqslant 2$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_k(n)}{n^{\alpha}}=\frac{\zeta(\alpha)\zeta(k\alpha-1)}{\zeta(k\alpha)}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\overline{S}_k(n)}{n^{\alpha}}=\frac{\zeta(\alpha)\zeta(k\alpha-1)}{\zeta(k\alpha)}\left[\frac{(2^{\alpha}-1)(2^{k\alpha-1}-1)}{2^{\alpha-2}(2^{k\alpha}-1)}-1\right].$$

证明　对任意的实数 $\alpha>1$ 和整数 $k\geqslant 2$, 令

$$g(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_k(n)}{n^{\alpha}}.$$

由函数 $\overline{S}_k(n)$ 的可乘性和 Euler 乘积公式,

$$\begin{aligned}
g(\alpha)&=\prod_{p}\left(1+\frac{\overline{S}_k(p)}{p^{\alpha}}+\frac{\overline{S}_k(p^2)}{p^{2\alpha}}+\frac{\overline{S}_k(p^3)}{p^{3\alpha}}+\cdots\right)\\
&=\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^{\alpha}}+\frac{1}{p^{2\alpha}}+\cdots+\frac{1}{p^{(k-1)\alpha}}+\frac{p}{p^{k\alpha}}+\cdots+\frac{p}{p^{(2k-1)\alpha}}+\cdots\right)\\
&=\prod_{p}\left(\frac{1-\frac{1}{p^{k\alpha}}}{1-\frac{1}{p^{\alpha}}}+\frac{p}{p^{k\alpha}}\frac{1-\frac{1}{p^{k\alpha}}}{1-\frac{1}{p^{\alpha}}}+\frac{p^2}{p^{2k\alpha}}\frac{1-\frac{1}{p^{k\alpha}}}{1-\frac{1}{p^{\alpha}}}+\cdots\right)\\
&=\prod_{p}\left(\frac{1-\frac{1}{p^{k\alpha}}}{1-\frac{1}{p^{\alpha}}}\right)\prod_{p}\left(1+\frac{p}{p^{k\alpha}}+\frac{p^2}{p^{2k\alpha}}+\cdots\right)\\
&=\prod_{p}\left(\frac{1-\frac{1}{p^{k\alpha}}}{1-\frac{1}{p^{\alpha}}}\right)\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^{k\alpha-1}}}\\
&=\frac{\zeta(\alpha)\zeta(k\alpha-1)}{\zeta(k\alpha)}.
\end{aligned}$$

于是完成了定理 4.5.2 的第一个恒等式的证明.

同样, 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\overline{S}_k(n)}{n^{\alpha}}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_k(2n-1)}{(2n-1)^{\alpha}}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_k(2n-1)}{(2n-1)^{\alpha}}\frac{\overline{S}_k(2^t)}{2^{t\alpha}}\\
&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_k(2n-1)}{(2n-1)^{\alpha}}\right)\left(1-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_k(2^t)}{2^{t\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

$$=\left(1-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_k(2^t)}{2^{t\alpha}}\right)\prod_{\substack{p\\ p\neq 2}}\left(1+\frac{\overline{S}_k(p)}{p^{\alpha}}+\frac{\overline{S}_k(p^2)}{p^{2\alpha}}+\frac{\overline{S}_k(p^3)}{p^{3\alpha}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\zeta(\alpha)\zeta(k\alpha-1)}{\zeta(k\alpha)}\frac{1-\sum\limits_{t=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_k(2^t)}{2^{t\alpha}}}{1+\sum\limits_{t=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_k(2^t)}{2^{t\alpha}}}$$

$$=\frac{\zeta(\alpha)\zeta(k\alpha-1)}{\zeta(k\alpha)}\left[\frac{(2^{\alpha}-1)(2^{k\alpha-1}-1)}{2^{\alpha-2}(2^{k\alpha}-1)}-1\right].$$

于是完成了定理 4.5.2 的证明.

在这两个定理中, 如果取 $k=2$, 可得到下列两个推论:

推论 4.5.1 设 $S_k(n)$ 是 Smarandache ceil 函数, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{S_2^2(n)}=\frac{1}{2}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{S_2^4(n)}=\frac{91}{102}.$$

证明 事实上, 在定理 4.5.1 中取 $k=2$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{S_2^{\alpha}(n)}=\frac{2^{\alpha}-3}{2^{\alpha}+1}\prod_{p}\left(1+\frac{2}{p^{\alpha}-1}\right)$$

$$=\frac{2^{\alpha}-3}{2^{\alpha}+1}\prod_{p}\frac{p^{\alpha}+1}{p^{\alpha}-1}=\frac{2^{\alpha}-3}{2^{\alpha}+1}\frac{\zeta^2(\alpha)}{\zeta(2\alpha)}.$$

分别取 $\alpha=2,4$, 并注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450}$, 于是完成了推论 4.5.1 的证明.

推论 4.5.2 设 $\overline{S}_k(n)$ 是 Smarandache ceil 函数的对偶函数, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_2(n)}{n^2}=\frac{15}{\pi^2}\zeta(3).$$

证明 在定理 4.5.2 中取 $k=2$, $\alpha=2$ 即可得.

4.6 关于 Smarandache 函数的恒等式

前面已经研究了关于 Smarandache 函数的很多方面的性质. 令 $p(n)$ 表示 n 的最大素因子, 显然 $S(n)\geqslant p(n)$. 事实上, 对大多数的 n, 总有 $S(n)=p(n)$. 令 $n=$

$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的素数分解式. 对一些正整数 α 和素数 $p=p_j$, 则有

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}=\alpha p.$$

如果 $\alpha<p$, 则 $S(p^\alpha)=\alpha p$. 但是对于 $\alpha\geqslant p$, 就很难计算 $S(p^\alpha)$ 的准确值了. 本节来讨论这个问题.

定理 4.6.1 设 p 是一素数, k 是一整数且 $1\leqslant k<p$. 对于多项式 $f(x)=x^{n_k}+x^{n_{k-1}}+\cdots+x^{n_1}$ 且 $n_k>n_{k-1}>\cdots>n_1$, 则有

$$S\left(p^{f(p)}\right)=(p-1)f(p)+pf(1).$$

证明 对任意的正整数 n 和素数 p, 如果 $p^\alpha\|n!$, 则有

$$\alpha=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^j}\right].$$

结合取整函数 $[x]$ 的性质, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{(\varphi(p^{n_k})+1)p+(\varphi(p^{n_{k-1}})+1)p+\cdots+(\varphi(p^{n_1})+1)p}{p^r}\right]\\=&\sum_{r=1}^{n_k}\left[\frac{(\varphi(p^{n_k})+1)p+(\varphi(p^{n_{k-1}})+1)p+\cdots+(\varphi(p^{n_1})+1)p}{p^r}\right]\\=&\sum_{i=1}^{k}(1+p^{n_i}-p^{n_i-1}+p^{n_i-1}-p^{n_i-2}+\cdots+p-1)\\=&p^{n_k}+p^{n_{k-1}}+\cdots+p^{n_1},\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}S\left(p^{f(p)}\right)=&\sum_{i=1}^{k}(\varphi(p^{n_i})+1)p=\sum_{i=1}^{k}(p-1)p^{n_i}+kp\\=&(p-1)f(p)+kp=(p-1)f(p)+kf(1).\end{aligned}$$

于是完成了定理 4.6.1 的证明.

定理 4.6.2 设 p 是一素数, k 是一整数且 $1\leqslant k<p$, 则对任意的正整数 n, 有

$$S(p^{kp^n})=k\left(\varphi(p^m)+\frac{1}{k}\right)p.$$

证明 设 n 是任意的正整数, $1 \leqslant k < p$ 为正整数. 有

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{k\left(\varphi(p^n)+\dfrac{1}{k}\right)p}{p^r}\right] &= \sum_{r=1}^{n}\left[\frac{k\left(p^{n+1}-p^n+\dfrac{p}{k}\right)}{p^r}\right]\\ &= 1+k(p^n-p^{n-1})+k(p^{n-1}-p^{n-2})+\cdots\\ &\quad +k(p-1)+\left[\frac{k(p-1)}{p}\right]\\ &= 1+k(p^n-1)+k-1\\ &= kp^n,\end{aligned}$$

即

$$S(p^{kp^n}) = k\left(\varphi(p^m)+\frac{1}{k}\right)p.$$

于是完成了定理 4.6.2 的证明.

由这两个定理可得到下面两个推论:

推论 4.6.1 对任意的整数 $n \geqslant 1$, 有恒等式

$$S(p^{g(p)}) = p^{n+1},$$

其中 $g(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + 1$.

推论 4.6.2 对任意的整数 $k \geqslant 2$, 可得到无穷多组数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 使得

$$S\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} S(m_i),$$

其中 $S(m_i) = S(p^{p^{\alpha_i}}) = (\varphi(p^{\alpha_i})+1)p$, α_i 是任意的正整数, p 为素数.

第 5 章　Smarandache 函数、素数函数及互素函数的应用

为了研究数论问题, 可以定义一些新的函数, 从而可以引申出新的研究方法和研究结果. 在 Smarandache 函数的启示下, 可以定义类似的函数, 而且在上述几章中也研究了很多. 本章主要完成 Smarandache 函数的一些应用, 并且认识 Smarandache 素数函数和 Smarandache 互素函数及其应用.

5.1　Smarandache 函数在完全数中的应用

设 n 是一个完全数且 $n = 2^{k-1}\cdot(2^k-1)$, 其中 $p = 2^k - 1$ 为素数. 本节研究 Smarandache 函数在完全数中的性质, 并给出函数值的一个精确表达式.

引理 5.1.1　设 $n = 2^i\cdot p$, p 为奇素数, i 为整数且满足条件

$$0 \leqslant i \leqslant \left[\frac{p}{2}\right] + \left[\frac{p}{2^2}\right] + \left[\frac{p}{2^3}\right] + \cdots + \left[\frac{p}{2^{[\log_2 p]}}\right] = e_2(p!)$$

的整数. $e_2(p!)$ 是 $p!$ 的标准分解式中因子 2 的指数, 则有

$$S(n) = p.$$

证明　由于 $(2^i, p) = 1$, 有 $S(n) = \max\{S(2^i), S(p)\} \geqslant S(p) = p$, 故 $S(n) \geqslant p$.

下面来证明 $n|p!$. 设

$$p! = p_1^{e_{p_1}(p!)} p_2^{e_{p_2}(p!)} \cdots p_s^{e_{p_s}(p!)},$$

其中 p_i 是 $p!$ 的标准素因数分解式中第 i 个素数. 很显然 $p_1 = 2, p_s = p, e_{p_s}(p!) = 1$. 所以

$$p! = 2^{e_{p_1}(p!)} \cdot p_2^{e_{p_2}(p!)} \cdots p_{s-1}^{e_{p_{s-1}}(p!)} \cdot p.$$

又因为 $e_{p_1}(p!) - i \geqslant 0$. 于是

$$\frac{p!}{n} = 2^{e_{p_1}(p!)-i} p_2^{e_{p_2}(p!)} \cdots p_{s-1}^{e_{p_{s-1}}(p!)}$$

是一个正整数.

因此有 $S(n)=p$.

定理 5.1.1 设 k 是一个正整数, $p=2^k-1$ 为素数, n 是一个完全数并且 $n=2^{k-1}\cdot(2^k-1)$, 则

$$S(n)=p.$$

证明 据引理 5.1.1, 有 $k-1\leqslant e_2(p!)$.

如果能够证明

$$k-1\leqslant 2^{k-1}-\frac{1}{2},$$

则完成命题的证明.

由于

$$k-1\leqslant 2^{k-1}-\frac{1}{2}=\frac{2^k-1}{2}=\frac{p}{2},$$

又 $k-1$ 是整数, 则有 $k-1\leqslant\left[\frac{p}{2}\right]\leqslant e_2(p!)$. 只需证明

$$k\leqslant 2^{k-1}+\frac{1}{2}.$$

由于 k 是整数, 上式等价于

$$k\leqslant 2^{k-1}.$$

在此考虑函数 $f(x)=2^{x-1}-x$, x 为实数.

很显然, 这个函数是可导的且 $f'(x)=2^{x-1}\ln 2-1$. 当 $2^{x-1}\ln 2-1>0$ 时, 函数 $f(x)$ 是单调递增的, 即

$$x>1-\frac{\ln\ln 2}{\ln 2}\approx 1.5287,$$

所以, 对 $x\geqslant 2$ 的任意实数, 函数 $f(x)$ 是单调递增的.

因此, 对 $x\geqslant 2$ 的任意实数, 有 $f(x)\geqslant f(2)=0$, 即对 $x\geqslant 2$ 的任意实数, 有 $2^{x-1}-x\geqslant 0$.

故对 $k\geqslant 2$ 的任意整数, 有 $2^{k-1}\geqslant k$.

于是完成了定理 5.1.1 的证明.

例如,

$$\begin{aligned}
6&=2\cdot 3, & S(6)&=3,\\
28&=2^2\cdot 7, & S(28)&=7,\\
496&=2^4\cdot 31, & S(496)&=31,\\
8128&=2^6\cdot 127, & S(8128)&=127.
\end{aligned}$$

5.2 应用 Smarandache 函数得到的一个结果

设 $n(n \geqslant 2)$ 是整数, p 为素数并且在 $m = p^{p^n}$ 情形下的一个结果. 首先有下面的引理

引理 5.2.1 对于任意的正整数 $m(m \geqslant 2)$ 和 $n(n \geqslant 2)$, 有

$$m^n = \left[\frac{m^{n+1} - m^n + m}{m}\right] + \left[\frac{m^{n+1} - m^n + m}{m^2}\right] + \cdots + \left[\frac{m^{n+1} - m^n + m}{m^{[\log_m(m^{n+1} - m^n + m)]}}\right].$$

证明 首先考虑 $\left[\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right)\right]$ 的值.

一方面, 如果 $n \geqslant 2$, 则有 $m^{n+1} - m^n + m < m^{n+1}$. 因而有 $\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right) < \log_m m^{n+1} = n + 1$.

另一方面, 如果 $m \geqslant 2$, 则有 $mm^n \geqslant 2m^n$, 即 $m^{n+1} \geqslant 2m^n$, 所以 $m^{n+1} - m^n + m \geqslant m^n$, 因而有 $\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right) \geqslant \log_m m^n = n$. 故 $\left[\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right)\right] \geqslant n$.

结合这两方面可得 $n \leqslant \left[\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right)\right] < n + 1$. 因此有

$$\left[\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right)\right] = n, \quad n, m \geqslant 2.$$

现在考虑当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时, $\left[\dfrac{m^{n+1} - m^n + m}{m^k}\right]$ 的值.

$$\left[\frac{m^{n+1} - m^n + m}{m^k}\right] = \left[m^{n+1-k} - m^{n-k} + \frac{1}{m^{k-1}}\right].$$

如果 $k = 1$, 有 $\left[\dfrac{m^{n+1} - m^n + m}{m^k}\right] = m^n - m^{n-1} + 1$.

如果 $1 < k \leqslant n$, 有 $\left[\dfrac{m^{n+1} - m^n + m}{m^k}\right] = m^{n+1-k} - m^{n-k}$.

接下来考虑和式的值:

$$\begin{array}{lllllllll}
k = 1, & m^n & -m^{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & +1 \\
k = 2, & & m^{n-1} & -m^{n-2} & & & & \\
k = 3, & & & m^{n-2} & -m^{n-3} & & & \\
\vdots & & & & \vdots & & & \\
k = n-1, & & & & & m^2 & -m & \\
k = n, & & & & & & m & -1
\end{array}$$

因此有

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{m^{n+1} - m^n + m}{m^k}\right] = m^n, \quad m, n \geqslant 2.$$

定理 5.2.1 设对任意的正整数 $n(n \geqslant 2)$ 和任意的素数 p, 有

$$S\left(p^{p^n}\right) = p^{n+1} - p^n - p.$$

证明 $e_p(k)$ 为 k 的标准素因数分解式中素因子 p 的指数, 于是由 $e_p(k)$ 的定义, 可得

$$e_p(k) = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \left[\frac{k}{p^3}\right] + \left[\frac{k}{p^{[\log_p k]}}\right].$$

应用引理 5.2.1, 有

$$\begin{aligned}&e_p((p^{n+1} - p^n - p)!)\\ =&\left[\frac{p^{n+1} - p^n - p}{p}\right] + \left[\frac{p^{n+1} - p^n - p}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{p^{n+1} - p^n - p}{p^{[\log_p (p^{n+1} - p^n - p)]}}\right]\\ =&p^n.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{(p^{n+1} - p^n - p)!}{p^{p^n}} \in \mathbf{N}, \quad \frac{(p^{n+1} - p^n - p)!}{p^{p^n}} \notin \mathbf{N}.$$

从而

$$S\left(p^{p^n}\right) = p^{n+1} - p^n - p.$$

5.3 带有 Smarandache 函数的同余

本节将研究函数 $S(2^k - 1)(\bmod k)$ 的值.

对 $2 \leqslant k \leqslant 97$ 的所有整数, 有表 5-1.

表 5-1

k	$S(2^k - 1)$	$S(2^k - 1)(\bmod k)$
2	3	1
3	7	1
4	5	1
5	31	1
6	7	1
7	127	1
8	17	1
9	73	1
10	31	1
11	89	1
12	13	1

续表

k	$S(2^k-1)$	$S(2^k-1)(\bmod k)$
13	8191	1
14	127	1
15	151	1
16	257	1
17	131071	1
18	73	1
19	524287	1
20	41	1
21	337	1
22	683	1
23	178481	1
24	241	1
25	1801	1
26	8191	1
27	262657	1
28	127	15
29	2089	1
30	331	1
31	2147483647	1
32	65537	1
33	599479	1
34	131071	1
35	122921	1
36	109	1
37	616318177	1
38	524287	1
39	121369	1
40	61681	1
41	164511353	1
42	5419	1
43	2099863	1
44	2113	1
45	23311	1
46	2796203	1
47	13264529	1
48	673	1
49	4432676798593	1
50	4051	1
51	131071	1
52	8191	27
53	20394401	1
54	262657	1

续表

k	$S(2^k-1)$	$S(2^k-1)(\bmod k)$
55	201961	1
56	15790321	1
57	1212847	1
58	3033169	1
59	3203431780337	1
60	1321	1
61	2305843009213693951	1
62	2147483647	1
63	649657	1
64	6700417	1
65	145295143558111	1
66	599479	1
67	761838257287	1
68	131071	35
69	10052678938039	1
70	122921	1
71	212885833	1
72	38737	1
73	9361973132609	1
74	616318177	1
75	10567201	1
76	525313	1
77	581283643249112959	1
78	22366891	1
79	1113491139767	1
80	4278255361	1
81	97685839	1
82	8831418697	1
83	57912614113275649087721	1
84	14449	1
85	9520972806333758431	1
86	2932031007403	1
87	9857737155463	1
88	2931542417	1
89	618970019642690137449562111	1
90	18837001	1
91	23140471537	1
92	2796203	47
93	658812288653553079	1
94	165768537521	1
95	30327152671	1
96	22253377	1
97	13842607235828485645766393	1

从表 5-1 中可以看出, 对 $2 \leqslant k \leqslant 97$, 仅有 4 个例外.

$$
\begin{aligned}
k = 28 = 2^2 \cdot 7, &\quad S(2^{28}-1) \equiv 15 (\bmod 28),\\
k = 52 = 2^2 \cdot 13, &\quad S(2^{52}-1) \equiv 27 (\bmod 52),\\
k = 68 = 2^2 \cdot 17, &\quad S(2^{68}-1) \equiv 35 (\bmod 68),\\
k = 92 = 2^2 \cdot 23, &\quad S(2^{92}-1) \equiv 47 (\bmod 92).
\end{aligned}
$$

观察这 4 个例子, 可以看出 $k = 2^2 \cdot p$(p 为素数) 时有

$$S(2^k - 1) \equiv \frac{k}{2} + 1 (\bmod k).$$

未解决的问题: 对所有的正整数 k, 能否找到 $S(2^k - 1)(\bmod k)$ 的值的通式?

5.4 Smarandache 素数函数的应用

定义 5.4.1　对任意给定的整数 n,

$$F(n) = n + 1 + \sum_{m=n+1}^{2n} \prod_{i=n+1}^{m} \left[-\left[-\frac{\sum_{j=1}^{i} \left(\left[\frac{i}{j}\right] - \left[\frac{i-1}{j}\right] \right) - 2}{i} \right] \right].$$

关于这个函数, 有下列结论:

定理 5.4.1　对上述定义的函数 $F(n)$, 有

$$p_{k+1} = F(p_k),$$

其中 $k \geqslant 1$, $p_k (k \geqslant 1)$ 为素数.

通过观察知 p_{k+1} 仅依赖 p_k, 和以前的素数没有关系.

证明　设 $P(i)$ 函数为 Smarandache 素数函数, 即

$$P(i) = \begin{cases} 1, & i \text{ 是合数}, \\ 0, & i \text{ 是素数}. \end{cases}$$

考虑下列乘积:

$$\prod_{i=p_k+1}^{m} P(i).$$

如果 $p_k < m < p_{k+1}$, i 为合数且满足 $p_k + 1 \leqslant i \leqslant m$ 有 $\prod\limits_{i=p_k+1}^{m} P(i) = 1$

如果 $m \geqslant p_{k+1}$, 则有 $P(p_{k+1})=0$, $\prod\limits_{i=p_k+1}^{m} P(i)=0$. 所以

$$\begin{aligned}\sum_{m=p_k+1}^{2p_k}\prod_{i=p_k+1}^{m}P(i)&=\sum_{m=p_k+1}^{p_{k+1}-1}\prod_{i=p_k+1}^{m}P(i)+\sum_{m=p_{k+1}}^{2p_k}\prod_{i=p_k+1}^{m}P(i)\\&=\sum_{m=p_k+1}^{p_{k+1}-1}1=p_{k+1}-1-(p_k+1)+1\\&=p_{k+1}-p_k-1.\end{aligned}$$

因此, 有

$$p_{k+1}=p_k+1+\sum_{m=p_k+1}^{2p_k}\prod_{i=p_k+1}^{m}P(i),$$

接下来寻找满足条件的 $P(i)$.

考察关系式

$$\left[\frac{i}{j}\right]-\left[\frac{i-1}{j}\right]=\begin{cases}1, & j|i,\\ 0, & j\nmid i,\end{cases}$$

其中 $j=1,2,\cdots,i$ $(i\geqslant 1)$, 则有

$$d(i)=\sum_{j=1}^{i}\left(\left[\frac{i}{j}\right]-\left[\frac{i-1}{j}\right]\right).$$

如果 i 是素数, $d(i)=2$, 有

$$-\left[-\frac{d(i)-2}{i}\right]=0;$$

如果 i 是合数, $d(i)>2$, 有

$$0<\frac{d(i)-2}{i}<1.$$

所以

$$-\left[-\frac{d(i)-2}{i}\right]=1.$$

因而有

$$P(i)=-\left[-\frac{\sum\limits_{j=1}^{i}\left(\left[\frac{i}{j}\right]-\left[\frac{i-1}{j}\right]\right)-2}{i}\right],\quad i\geqslant 2$$

于是完成了定理 5.4.1 的证明.

5.5 素数序列和 Smarandache 素数函数的通项

5.4 节证明了

$$d(i)=\sum_{k=1}^{i}\left[\frac{i}{k}\right]-\left[\frac{i-1}{k}\right].$$

由此

$$P(i)=-\left[-\frac{d(i)-2}{i}\right],$$

即 Smarandache 素数函数. 也是

$$P(i)=\begin{cases}1, & i\text{ 为合数},\\ 0, & i\text{ 为素数}.\end{cases}$$

容易证明:

$$\pi(n)=\sum_{i=2}^{n}(1-P(i)),$$

并且有

当 $1\leqslant k\leqslant p_n-1$ 时, 有 $\left[\dfrac{\pi(k)}{n}\right]=0$;

当 $p_n\leqslant k\leqslant C_n$ 时, 有 $\left[\dfrac{\pi(k)}{n}\right]=1$.

接下来寻找满足条件的 C_n.

令 p_n 为 n 的第 n 个素数, 则有

$$p_n=1+\sum_{k=1}^{C_n}\left(1-\left[\frac{\pi(k)}{n}\right]\right),$$

如果能够证明 C_n 仅仅依赖于 n, 则表达式为素数序列的通项. 由于 $\pi(n)$ 和函数 $P(i)$ 有关, $P(i)$ 和 $d(i)$ 有关, 而 $d(i)$ 和 i 有关. 所以, 表达式仅仅依赖于 n.

考察函数 $C_n=2([n\ln n]+1)$.

对于某一确定的 n_0, 有 $p_n\approx n\ln n$, 则有

$$p_n\leqslant 2([n\ln n]+1), \tag{5-1}$$

如果 n_0 很小, 很容易证明 $n\leqslant n_0$, 不等式都成立.

又

$$\left[\frac{\pi(2([n\ln n]+1))}{n}\right]=1.$$

通过验证, 有不等式

$$\pi(2([n\ln n]+1)) < 2n, \tag{5-2}$$

于是得到

$$\frac{\pi(C_n)}{n} < 2, \quad \left[\frac{\pi(C_n)}{n}\right] \leqslant 1$$

和

$$C_n \geqslant p_n, \quad \left[\frac{\pi(C_n)}{n}\right] = 1.$$

通过实验验证上述不等式, 可以认为它对所有 n 都成立.

因此, 通过验证和证明, (5-1) 和 (5-2) 对所有的 n 都成立, 于是有素数序列的通项

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{2([n\ln n]+1)} \left(1 - \left[\frac{\sum\limits_{j=2}^{k}\left(1 + \left[-\frac{\sum\limits_{s=1}^{j}\left(\left[\frac{j}{s}\right] - \left[\frac{j-1}{s}\right]\right) - 2}{j}\right]\right)}{n}\right]\right).$$

5.6 Smarandache 互素函数的表达式

定义 5.6.1 Smarandache 互素函数 $C_k(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 定义为

$$C_k(n_1, n_2, \cdots, n_k) = \begin{cases} 0, & n_1, n_2, \cdots, n_k \text{ 互素}, \\ 1, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $k=2$ 时, Smarandache 互素函数的两个表达式为

表达式 1

$$C_2(n_1, n_2) = -\left[-\frac{n_1n_2 - [n_1, n_2]}{n_1n_2}\right].$$

如果 n_1, n_2 互素, 有

$$C_2(n_1, n_2) = -\left[\frac{0}{n_1n_2}\right] = 0;$$

如果 n_1, n_2 不互素, 有

$$[n_1, n_2] < n_1n_2 \Rightarrow 0 < \frac{n_1n_2 - [n_1, n_2]}{n_1n_2} < 1 \Rightarrow C_2(n_1, n_2) = 1.$$

表达式 2

$$C_2(n_1,n_2)=1+\left[-\frac{\prod\limits_{d|n_1,\ d>1}\ \prod\limits_{d'|n_2,\ d'>1}|d-d'|}{\prod\limits_{d|n_1}\prod\limits_{d|n_2}(d+d')}\right].$$

如果 n_1,n_2 互素, 则

$$d\neq d'(\forall\, d,d'\neq 1)\Rightarrow 0<\frac{\prod\limits_{d|n_1,\ d>1}\ \prod\limits_{d'|n_2,\ d'>1}|d-d'|}{\prod\limits_{d|n_1}\prod\limits_{d|n_2}(d+d')}<1\Rightarrow C_2(n_1,n_2)=0;$$

如果 n_1,n_2 不互素, 有

$$\exists\, d=d'(d>1,d'>1)\Rightarrow C_2(n_1,n_2)=0.$$

当 $k\geqslant 2$ 时, Smarandache 互素函数为

表达式 3

$$C_k(n_1,n_2,\cdots,n_k)=-\left[\frac{1}{(n_1,n_2,\cdots,n_k)}-1\right].$$

如果 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 互素, 即 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)=1$, 有

$$C_k(n_1,n_2,\cdots,n_k)=0;$$

如果 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 不互素, 即 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)>1$, 有

$$\begin{aligned}0<\frac{1}{(n_1,n_2,\cdots,n_k)}<1\Rightarrow -\left[\frac{1}{(n_1,n_2,\cdots,n_k)}-1\right]&=1\\&=C_k(n_1,n_2,\cdots,n_k).\end{aligned}$$

第 6 章　关于著名多项式和著名数列的恒等式

前面几章主要介绍了数论函数、特殊数列的均值性质及特殊方程解的问题，主要应用初等或解析的数论方法来完成研究工作. 另外，著名的 Chebyshev 多项式、Gegenbauer 多项式与 Fibonacci 数列、Lucas 数列、Bernoulli 数列及 Euler 数列在数论的研究工作中占有很重要的地位. 本章主要涉及近年来关于这些多项式和数列研究的结果，希望通过本章的学习激发读者对这一领域问题的研究兴趣.

6.1　关于 Chebyshev 多项式和 Fibonacci 数的恒等式

著名的 Fibonacci 数列和 Lucas 数列分别由二次线性递推公式 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 和 $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$ $(n\geqslant 0)$ 所定义，其中 $F_0=0,\ F_1=1,\ L_0=2,\ L_1=1$. 这两个数列在数学的理论研究和实际应用中有着重要的作用，从而引起了不少学者的重视，并对这两个数列的不同特性进行了深入细致的研究. 张文鹏教授在这方面做了许多开创性工作 (参阅文献 [28], [29])，给出了许多包含 Chebyshev 多项式、Fibonacci 数和 Lucas 数的恒等式.

定义 6.1.1　第一类 Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ \cdots,n)$ 由递推公式

$$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$$

给出，其中 $n\geqslant 0,\ T_0(x)=1,\ T_1(x)=x$.

定义 6.1.2　第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ \cdots,n)$ 由递推公式

$$U_{n+2}(x)=2xU_{n+1}(x)-U_n(x)$$

给出，其中，$n\geqslant 0,\ U_0(x)=1,\ U_1(x)=2x$.

方便起见，用 $T_n^{(k)}(x)$ 和 $U_n^{(k)}(x)$ 分别表示 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 对 x 的 k 阶导数. 来证明下列定理：

定理 6.1.1　对于第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$，对任意正整数 k 和非负整数 n，有恒等式

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n}\prod_{i=1}^{k+1}U_{a_i}(x)=\frac{1}{2^k\cdot k!}U_{n+k}^{(k)}(x),$$

这里 $\displaystyle\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n}$ 是对满足 $a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n$ 的所有 $k+1$ 维非负整数坐标 $(a_1,\ a_2,\cdots,a_{k+1})$ 求和.

证明　首先, 注意到 (参阅文献 [30])

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2+1})^n + (x-\sqrt{x^2+1})^n\right] \tag{6-1}$$

和

$$U_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left[(x+\sqrt{x^2+1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2+1})^{n+1}\right]. \tag{6-2}$$

很容易得出 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 的生成函数分别为

$$G(t,x) = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\cdot t^n \tag{6-3}$$

和

$$F(t,x) = \frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\cdot t^n. \tag{6-4}$$

那么由 (6-4) 有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} &= \frac{2t}{(1-2xt+t^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U'_{n+1}(x)\cdot t^{n+1},\\
\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2} &= \frac{2!\cdot(2t)^2}{(1-2xt+t^2)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} U''_{n+2}(x)\cdot t^{n+2},\\
&\cdots\cdots\\
\frac{\partial^k F(t,x)}{\partial x^k} &= \frac{k!\cdot(2t)^k}{(1-2xt+t^2)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(k)}_{n+k}(x)\cdot t^{n+k},
\end{aligned} \tag{6-5}$$

在这里用到了 $U_n(x)$ 是 n 次多项式.

因此, 由 (6-5) 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n} U_{a_1}(x)\cdot U_{a_2}(x)\cdot\cdots\cdot U_{a_{k+1}}(x)\right)\cdot t^n\\
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\cdot t^n\right)^{k+1} = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{k+1}}\\
&=\frac{1}{k!(2t)^k}\frac{\partial^k F(t,x)}{\partial x^k} = \frac{1}{2^k\cdot k!}\sum_{n=0}^{\infty} U^{(k)}_{n+k}(x)\cdot t^n.
\end{aligned}$$

对比上式两边 t^n 项的系数, 得到恒等式

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n} U_{a_1}(x)\cdot U_{a_2}(x)\cdot\cdots\cdot U_{a_{k+1}}(x) = \frac{1}{2^k\cdot k!}U^{(k)}_{n+k}(x).$$

于是完成了定理 6.1.1 的证明.

定理 6.1.2 对任意的正整数 k 和非负整数 n, 有恒等式

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n+2k+2}\prod_{i=1}^{k+1}(a_i+1)U_{a_i}(x)$$
$$=\frac{1}{2^{2k+1}\cdot(2k+1)!}\sum_{h=0}^{k+1}(-1)^h\binom{k+1}{h}U^{(2k+1)}_{n+4k+3-2h}(x),$$

这里 $\binom{k}{h}=\dfrac{k!}{h!(k-h)!}$.

证明 注意到 $\dfrac{\mathrm{d}(T_n(x))}{\mathrm{d}x}=nU_{n-1}(x)$ 和

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}=\frac{t-t^3}{(1-2xt+t^2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T'_{n+1}(x)\cdot t^{n+1}$$

或

$$\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)U_n(x)\cdot t^n. \tag{6-6}$$

在式 (6-5) 中取 $k=2m+1$, 两边同时乘以 $(1-t^2)^{m+1}$ 可得

$$\frac{(1-t^2)^{m+1}}{(1-2xt+t^2)^{2m+2}}$$
$$=\frac{1}{2^{2m+1}\cdot(2m+1)!}\sum_{n=0}^{\infty}U^{(2m+1)}_{n+2m+1}(x)\cdot t^n(1-t^2)^{m+1}. \tag{6-7}$$

结合式 (6-6) 和 (6-7),

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n+2m+2}(a_1+1)\cdots(a_{m+1}+1)U_{a_1}(x)\cdots U_{a_{m+1}}(x)$$
$$=\frac{1}{2^{2m+1}\cdot(2m+1)!}\sum_{h=0}^{m+1}(-1)^h\binom{m+1}{h}U^{(2m+1)}_{n+4m+3-2h}(x).$$

于是完成了定理 6.1.2 的证明.

定理 6.1.3 对任意的正整数 k 和非负整数 n, 有恒等式

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n+k+1}\prod_{i=1}^{k+1}T_{a_i}(x)$$
$$=\frac{1}{2^k\cdot k!}\sum_{h=0}^{k+1}(-x)^h\binom{k+1}{h}U^{(k)}_{n+2k+1-h}(x).$$

证明　对式 (6-5) 两边同时乘以 $(1-xt)^{k+1}$ 得

$$\frac{(1-xt)^{k+1}}{(1-2xt+t^2)^{k+1}}=\frac{1}{2^k\cdot k!}\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+k}^{(k)}(x)\cdot t^n(1-xt)^{k+1}. \tag{6-8}$$

考虑到

$$(1-xt)^{k+1}=\sum_{h=0}^{k+1}(-1)^h t^h\binom{k+1}{h}.$$

对比式 (6-8) 等号两边 t^{n+k+1} 项的系数, 即可完成定理 6.1.3 的证明.

从这些定理中, 根据 Chebyshev 多项式和 Fibonacci 数、Lucas 数的关系, 便有

推论 6.1.1　*设 F_n 为第 n 个 Fibonacci 数. 对任意正整数 k 和非负整数 n, 有恒等式*

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n}F_{a_1+1}\cdot F_{a_2+1}\cdot\cdots\cdot F_{a_{k+1}+1}=\frac{(-i)^n}{2^k\cdot k!}U_{n+k}^{(k)}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right),$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n}F_{2(a_1+1)}\cdot F_{2(a_2+1)}\cdot\cdots\cdot F_{2(a_{k+1}+1)}=\frac{(-1)^n}{2^k\cdot k!}U_{n+k}^{(k)}\left(\frac{-3}{2}\right),$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n}F_{3(a_1+1)}\cdot F_{3(a_2+1)}\cdot\cdots\cdot F_{3(a_{k+1}+1)}=\frac{2\mathrm{i}^n}{2^k}U_{n+k}^{(k)}(-2\mathrm{i}),$$

这里 $\mathrm{i}^2=-1$. 特别地, 当 $k=2$, 有恒等式

$$\sum_{a+b+c=n}F_{a+1}\cdot F_{b+1}\cdot F_{c+1}=\frac{1}{50}[(n+2)(5n+17)F_{n+3}-6(n+3)F_{n+2}],$$

$$\sum_{a+b+c=n}F_{2(a+1)}\cdot F_{2(b+1)}\cdot F_{2(c+1)}=\frac{1}{50}[18(n+3)F_{2n+4}+(n+2)(5n-7)F_{2n+6}]$$

$$\sum_{a+b+c=n}F_{3(a+1)}\cdot F_{3(b+1)}\cdot F_{3(c+1)}=\frac{1}{50}[(n+2)(5n+8)F_{3n+9}-6(n+3)F_{3n+6}].$$

推论 6.1.2　*设 F_n 为第 n 个 Fibonacci 数, 对任意正整数 k 和非负整数 n, 有恒等式*

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n+2k+2}(a_1+1)\cdots(a_{k+1}+1)F_{a_1+1}\cdot F_{a_2+1}\cdot\cdots\cdot F_{a_{k+1}+1}$$
$$=\frac{(-\mathrm{i})^{n+2k+2}}{2^{2k+1}\cdot(2k+1)!}\sum_{h=0}^{k+1}(-1)^h\binom{k+1}{h}U_{n+4k+3-2h}^{(2k+1)}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right),$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n+2k+2}(a_1+1)\cdots(a_{k+1}+1)F_{2(a_1+1)}\cdot F_{2(a_2+1)}\cdot\cdots\cdot F_{2(a_{k+1}+1)}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2k+1}\cdot(2k+1)!}\sum_{h=0}^{k+1}(-1)^h\binom{k+1}{h}U_{n+4k+3-2h}^{(2k+1)}\left(\frac{-3}{2}\right),$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n+2k+2}(a_1+1)\cdots(a_{k+1}+1)F_{3(a_1+1)}\cdot F_{3(a_2+1)}\cdot\cdots\cdot F_{3(a_{k+1}+1)}$$

$$=\frac{i^{n+2k+2}}{2^k\cdot(2k+1)!}\sum_{h=0}^{k+1}(-1)^h\binom{k+1}{h}U_{n+4k+3-2h}^{(2k+1)}(-2\mathrm{i}).$$

推论 6.1.3 设 L_n 为第 n 个 Lucas 数, 对任意正整数 k 和非负整数 n, 有恒等式

$$\sum_{a_1+\cdots+a_{k+1}=n+k+1}L_{a_1}\cdot L_{a_2}\cdot\cdots\cdot L_{a_{k+1}}$$

$$=\frac{(-\mathrm{i})^{n+k+1}}{2^{-1}\cdot k!}\sum_{h=0}^{k+1}\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^h\binom{k+1}{h}U_{n+2k+1-h}^{(k)}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right),$$

$$\sum_{a_1+\cdots+a_{k+1}=n+k+1}L_{2a_1}\cdot L_{2a_2}\cdot\cdots\cdot L_{2a_{k+1}}$$

$$=\frac{(-\mathrm{i})^{n+k+1}}{2^{-1}\cdot k!}\sum_{h=0}^{k+1}\left(\frac{3}{2}\right)^h\binom{k+1}{h}U_{n+2k+1-h}^{(k)}\left(\frac{-3}{2}\right),$$

$$\sum_{a_1+\cdots+a_{k+1}=n+k+1}L_{3a_1}\cdot L_{3a_2}\cdot\cdots\cdot L_{3a_{k+1}}$$

$$=\frac{\mathrm{i}^{n+k+1}}{2^{-1}\cdot k!}\sum_{h=0}^{k+1}(2\mathrm{i})^h\binom{k+1}{h}U_{n+2k+1-h}^{(k)}(-2i).$$

这里 $\mathrm{i}^2=-1$. 特别地, 当 $k=2$, 有恒等式

$$\sum_{a+b+c=n+3}L_a\cdot L_b\cdot L_c=\frac{n+5}{2}[(n+10)F_{n+3}+2(n+7)F_{n+2}],$$

$$\sum_{a+b+c=n+3}L_{2a}\cdot L_{2b}\cdot L_{2c}=\frac{n+5}{2}[3(n+10)F_{2n+5}+(n+16)F_{2n+4}],$$

$$\sum_{a+b+c=n+3}L_{3a}\cdot L_{3b}\cdot L_{3c}=\frac{n+5}{2}[4(n+10)F_{3n+7}+3(n+9)F_{3n+6}].$$

证明 在定理 6.1.1～ 定理 6.1.3 中, 分别取 $x=\frac{\mathrm{i}}{2},\ \frac{-3}{2}$ 和 $-2\mathrm{i}$, 并且考虑

$$U_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=\mathrm{i}^nF_{n+1},\quad U_n\left(\frac{-3}{2}\right)=(-1)^nF_{2(n+1)},\quad U_n(-2\mathrm{i})=\frac{(-\mathrm{i})^n}{2}F_{3(n+1)},$$

$$T_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=\frac{\mathrm{i}^n}{2}L_n,\quad T_n\left(\frac{-3}{2}\right)=\frac{(-1)^n}{2}L_{2n},\quad T_n(-2\mathrm{i})=\frac{(-\mathrm{i})^n}{2}L_{3n},$$

$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

同时

$$(1-x^2)U_n'(x)=(n+1)U_{n-1}(x)-nxU_n(x)$$

和

$$(1-x^2)U_n''=3xU_n'(x)-n(n+2)U_n(x),$$

就可完成推论 6.1.1∼ 推论 6.1.3 的证明.

推论 6.1.4　对任意非负整数 n, 有同余式

$$(n+2)(5n+8)F_{3n+9}\equiv 6(n+3)F_{3n+6}(\bmod 400).$$

推论 6.1.1 中, 满足 $2|F_{3(a+1)}$ 的 $a\geqslant 0$ 所有整数都有推论 6.1.4.

6.2　Chebyshev 多项式和 Fibonacci 数、Lucas 数的恒等式

由式 (6-1) 和式 (6-2) 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_n(x)}{n!}t^n&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n]t^n\\&=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{(x+\sqrt{x^2-1})t}+\mathrm{e}^{(x-\sqrt{x^2-1})t}\right)=\Phi_1(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n(x)}{n!}t^n&=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}-(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}]t^n\\&=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\Big(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{e}^{(x+\sqrt{x^2-1})t}\\&\quad-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{e}^{(x-\sqrt{x^2-1})t}\Big)=\Phi_2(t).\end{aligned}$$

于是, $\dfrac{T_n(x)}{n!}$ 和 $\dfrac{U_n(x)}{n!}$ 分别由 $\Phi_1(t)$ 与 $\Phi_2(t)$ 的展开式系数来定义, 本节用初等方法给出形如

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{T_{ma_1}(x)}{a_1!}\cdot\frac{T_{ma_2}(x)}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{T_{ma_k}(x)}{a_k!}$$

与

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{U_{ma_1}(x)}{a_1!}\cdot\frac{U_{ma_2}(x)}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{U_{ma_k}(x)}{a_k!}$$

的一组恒等式. 在此基础上得到了 Fibonacci 数和 Lucas 数的一组有趣的恒等式.

引理 6.2.1 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 分别为第一类和第二类 Chebyshev 多项式, m,n 为任意正整数, 有

$$T_n(T_m(x))=T_{mn}(x),\quad U_n(T_m(x))=\frac{U_{m(n+1)-1}(x)}{U_{m-1}(x)}.$$

证明 对任意的整数 m, 由式 (6-1) 有

$$\begin{aligned}T_m^2(x)-1&=\frac{1}{4}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^m+(x-\sqrt{x^2-1})^m\right]^2-1\\&=\frac{1}{4}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^m-(x-\sqrt{x^2-1})^m\right]^2,\end{aligned}$$

或

$$\sqrt{T_m^2(x)-1}=\frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^m-(x-\sqrt{x^2-1})^m\right],$$

因此,

$$\begin{aligned}T_m(x)+\sqrt{T_m^2(x)-1}&=(x+\sqrt{x^2-1})^m,\\T_m(x)-\sqrt{T_m^2(x)-1}&=(x-\sqrt{x^2-1})^m.\end{aligned}$$

结合式 (6-1) 和上两式, 有

$$\begin{aligned}U_n(T_m(x))&=\frac{1}{2\sqrt{T_m^2(x)-1}}\left[\left(T_m(x)+\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^{n+1}\right.\\&\quad\left.-\left(T_m(x)-\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^{n+1}\right]\\&=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{m(n+1)}-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{m(n+1)}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^m}\\&=\frac{U_{m(n+1)-1}(x)}{U_{m-1}(x)}.\end{aligned}$$

同理, 可得 $T_n(T_m(x))=T_{mn}(x)$.

于是完成了引理 6.2.1 的证明.

定理 6.2.1 设 m 和 n 是正整数, 对于任意的正整数 k, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{T_{ma_1}(x)}{a_1!}\cdot\frac{T_{ma_2}(x)}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{T_{ma_k}(x)}{a_k!}\\&=\frac{1}{n!\cdot 2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\left(kT_m(x)+(k-2l)\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^n.\end{aligned}$$

证明 由 $\Phi_1(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{T_n(x)}{n!}t^n$ 有

$$\Phi_1^k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{T_{a_1}(x)}{a_1!}\cdot\frac{T_{a_2}(x)}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{T_{a_k}(x)}{a_k!}\right)t^n.$$

而

$$\begin{aligned}\Phi_1^k(t) &= \frac{1}{2^k}\left(\mathrm{e}^{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)t}+\mathrm{e}^{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)t}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mathrm{e}^{(k-l)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)t}\cdot \mathrm{e}^{l\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)t} \\ &= \frac{1}{2^k}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{\left(kx+(k-2l)\sqrt{x^2-1}\right)^n}{n!}t^n.\end{aligned}$$

比较上两式中 t^n 的系数有

$$\begin{aligned}&\frac{T_{a_1}(x)}{a_1!}\cdot\frac{T_{a_2}(x)}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{T_{a_k}(x)}{a_k!} \\ &= \frac{1}{n!\cdot 2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\left(kx+(k-2l)\sqrt{x^2-1}\right)^n.\end{aligned}$$

用 $T_m(x)$ 替换 x 得

$$\begin{aligned}&\frac{T_{a_1}(T_m(x))}{a_1!}\cdot\frac{T_{a_2}(T_m(x))}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{T_{a_k}(T_m(x))}{a_k!} \\ &= \frac{1}{n!\cdot 2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\left(kx+(k-2l)\sqrt{x^2-1}\right)^n.\end{aligned}$$

再应用 $T_n(T_m(x))=T_{mn}(x)$ 有

$$\begin{aligned}&\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{T_{ma_1}(x)}{a_1!}\cdot\frac{T_{ma_2}(x)}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{T_{ma_k}(x)}{a_k!} \\ &= \frac{1}{n!\cdot 2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\left(kT_m(x)+(k-2l)\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^n.\end{aligned}$$

事实上, 第 n 个 Fibonacci 数为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{6-9}$$

于是在定理 6.2.1 的结论中, 令 $x=\frac{\mathrm{i}}{2}$ 并应用 $T_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=\frac{\mathrm{i}^n}{2}L_n$ 可得到 Lucas 数和 Fibonacci 数的运算关系, 即

推论 6.2.1　对 Lucas 数 L_n 和 Fibonacci 数 F_n, 有恒等式

$$\begin{aligned}&\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{L_{ma_1}}{a_1!}\cdot\frac{L_{ma_2}}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{L_{ma_k}}{a_k!} \\ &= \frac{1}{n!\cdot 2^n}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(kL_m+(k-2l)\sqrt{5}F_m)^n.\end{aligned}$$

定理 6.2.2 设 m 和 n 是正整数, 对于任意的正整数 k, 有

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{U_{m(a_1+1)-1}(x)}{a_1!}\cdot\frac{U_{m(a_2+1)-1}(x)}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{U_{m(a_k+1)-1}(x)}{a_k!}$$
$$=\frac{U_{m-1}^k(x)}{n!\cdot 2^k\sqrt{x^2-1}^k}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}\left(T_m(x)+\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^{k-l}$$
$$\times\left(T_m(x)-\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^l\cdot\left(kT_m(x)+(k-2l)\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^n.$$

证明 由 $\Phi_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n(x)}{n!}t^n$, 因此

$$\Phi_2^k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{U_{a_1}(x)}{a_1!}\cdot\frac{U_{a_2}(x)}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{U_{a_k}(x)}{a_k!}\right)t^n.$$

而

$$\Phi_2^k(t)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{e}^{(x+\sqrt{x^2-1})t}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{e}^{(x-\sqrt{x^2-1})t}\right)\right)^k$$
$$=\frac{1}{2^k\sqrt{(x^2-1)^k}}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k-l}\mathrm{e}^{(k-l)(x+\sqrt{x^2-1})t}$$
$$\times(-1)^l\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^l\mathrm{e}^{l(x-\sqrt{x^2-1})t}$$
$$=\frac{1}{2^kn!\sqrt{(x^2-1)^k}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-l}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^l$$
$$\times\frac{(kx+(k-2l)\sqrt{x^2-1})^n}{n!}t^n.$$

比较上两式中 t^n 的系数有

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{U_{a_1}(x)}{a_1!}\cdot\frac{U_{a_2}(x)}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{U_{a_k}(x)}{a_k!}$$
$$=\frac{1}{2^kn!\sqrt{(x^2-1)^k}}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-l}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^l$$
$$\times\left(kx+(k-2l)\sqrt{x^2-1}\right)^n.$$

用 $T_m(x)$ 替换 x 得

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{U_{a_1}(T_m(x))}{a_1!}\cdot\frac{U_{a_2}(T_m(x))}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{U_{a_k}(T_m(x))}{a_k!}$$

$$=\frac{1}{2^k n!\sqrt{(x^2-1)^k}}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}\left(T_m(x)+\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^{k-l}$$

$$\times\left(T_m(x)-\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^l\left(kT_m(x)+(k-2l)\sqrt{T_m^2(x)}-1\right)^n.$$

再应用 $U_n(T_m(x))=\dfrac{U_{m(n+1)-1}(x)}{U_{m-1}(x)}$ 有

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{U_{m(a_1+1)-1}(x)}{a_1!}\cdot\frac{U_{m(a_2+1)-1}(x)}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{U_{m(a_k+1)-1}(x)}{a_k!}$$

$$=\frac{U_{m-1}^k(x)}{n!\cdot 2^k\sqrt{T_m^2(x)-1}^k}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}\left(T_m(x)+\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^{k-l}$$

$$\times\left(T_m(x)-\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^l\cdot\left(kT_m(x)+(k-2l)\sqrt{T_m^2(x)-1}\right)^n.$$

于是完成了定理 6.2.2 的证明.

而且, 在定理 6.2.2 中令 $x=\dfrac{\mathrm{i}}{2}$ 并应用

$$U_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=\mathrm{i}^nF_{n+1},\quad T_m\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=\frac{\mathrm{i}^m}{2}L_m,$$

有

推论 6.2.2　对 Lucas 数 L_n 和 Fibonacci 数 F_n, 有恒等式

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{F_{m(a_1+1)}}{a_1!}\cdot\frac{F_{m(a_2+1)}}{a_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{F_{m(a_k+1)}}{a_k!}$$

$$=\frac{1}{n!\cdot 2^n\sqrt{5}^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m(k-l)}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{ml}$$

$$\times\left(kL_m+(k-2l)\sqrt{5}F_m\right)^n.$$

6.3　Fibonacci 数偶次幂的积和式

本节根据 Chebyshev 多项式和 Fibonacci 数的关系给出关于

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n}F_{qd_1}^{2m}F_{qd_2}^{2m}\cdots F_{qd_p}^{2m}$$

的计算式, 这里的和式是针对所有 p 维非负整数坐标 $(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 且 $d_1 + d_2 + \cdots + d_p = n$, p 和 q 为任意正整数, n 为任意非负整数.

定义 6.3.1 Gegenbauer 多项式 $C_n^{\lambda}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 由下列生成函数定义:

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\lambda}(x) t^n, \quad \lambda > -\frac{1}{2}, -1 < x < 1, |t| < 1. \tag{6-10}$$

事实上, 应用初等方法和 Chebyshev 多项式的性质证明下面的引理:

引理 6.3.1 对任意正整数 m, n 和 p, 有恒等式

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} U_{d_1}^{2m}(x) U_{d_2}^{2m}(x) \cdots U_{d_p}^{2m}(x)$$
$$= \frac{2^p}{4^{mp}(x^2-1)^{mp}} \sum_{a_0+a_1+\cdots+a_m=p} \sum_{b_0+b_1+\cdots+b_m=n} \binom{a_0 a_1 \cdots a_m}{p} \prod_{k=0}^{m} (-1)^{(m-k)a_k} \binom{2m}{k}^{a_k}$$
$$\times \sum_{r_k=0}^{a_k} \binom{a_k}{r_k} (-1)^{r_k} \sqrt{(x^2-1)U_{2k}^2(x)+1}^{\,r_k} C_{b_k - r_k}^{a_k} \left(\sqrt{(x^2-1)U_{2k}^2(x)+1} \right).$$

证明 注意到 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1}) = 1$ 和 $T_{-n}(x) = T_n(x)$, 有

$$\begin{aligned} U_n^{2m}(x) &= \frac{1}{2^{2m}\sqrt{x^2-1}^{2m}} \left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n - \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n \right]^{2m} \\ &= \frac{2}{4^m (x^2-1)^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{2m}{k} \\ &\quad \times \left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{2nk} + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{2nk} \right], \end{aligned}$$

也就是

$$U_n^{2m}(x) = \frac{2}{4^m (x^2-1)^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{2m}{k} T_{2nk}(x),$$

由于 $T_n(T_m(x)) = T_{mn}(x)$,

$$U_n^{2m}(x) = \frac{2}{4^m (x^2-1)^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{2m}{k} T_n\left(T_{2k}(x)\right).$$

设 $f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n^{2m}(x)t^n$, 考虑到上式有

$$\begin{aligned}f(x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{4^m(x^2-1)^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{2m}{k}T_n\left(T_{2k}\left(x\right)\right)\right]t^n\\&=\frac{2}{4^m(x^2-1)^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{2m}{k}\sum_{n=0}^{\infty}T_n\left(T_{2k}\left(x\right)\right)t^n\\&=\frac{2}{4^m(x^2-1)^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{2m}{k}G\left(T_{2k}(x),t\right),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f^p(x,t)&=\frac{2^p}{4^{mp}(x^2-1)^{mp}}\left[\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{2m}{k}g(T_{2k}(x),t)\right]^p\\&=\frac{2^p}{4^{mp}(x^2-1)^{mp}}\sum_{a_0+a_1+\cdots+a_m=p}\binom{p}{a_0a_1\cdots a_m}\prod_{k=0}^{m}(-1)^{(m-k)a_k}\\&\quad\times\binom{2m}{k}^{a_k}G^{a_k}(T_{2k}(x),t),\end{aligned}$$

由 (6-10) 和 (6-3) 有

$$\begin{aligned}G^{a_k}(T_{2k}(x),t)&=(1-T_{2k}(x)t)^{a_k}\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{a_k}\left(T_{2k}(x)\right)t^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r_k=0}^{a_k}\binom{a_k}{r_k}(-1)^{r_k}T_{2k}^{r_k}(x)C_{n-r_k}^{a_k}\left(T_{2k}(x)\right)t^n.\end{aligned}$$

结合上述两式可以得到

$$\begin{aligned}f^p(x,t)=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^p}{4^{mp}(x^2-1)^{mp}}\\&\times\sum_{a_0+a_1+\cdots+a_m=p}\ \sum_{b_0+b_1+\cdots+b_m=n}\binom{p}{a_0a_1\cdots a_m}\prod_{k=0}^{m}(-1)^{(m-k)a_k}\binom{2m}{k}^{a_k}\\&\times\sum_{r_k=0}^{a_k}\binom{a_k}{r_k}(-1)^{r_k}T_{2k}^{r_k}(x)C_{b_k-r_k}^{a_k}\left(T_{2k}(x)\right)t^n\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}f^p(x,t)&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}U_n^{2m}(x)t^n\right)^p\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_p=n}U_{a_1}^{2m}(x)U_{a_2}^{2m}(x)\cdots U_{a_p}^{2m}(x)\right)t^n.\end{aligned}$$

比较上两式 t^n 项的系数

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} U_{d_1}^{2m}(x)U_{d_2}^{2m}(x)\cdots U_{d_p}^{2m}(x)$$
$$=\frac{2^p}{4^{mp}(x^2-1)^{mp}}\sum_{a_0+a_1+\cdots+a_m=p}\ \sum_{b_0+b_1+\cdots+b_m=n}\binom{p}{a_0a_1\cdots a_m}$$
$$\times\prod_{k=0}^{m}(-1)^{(m-k)a_k}\binom{2m}{k}^{a_k}\sum_{r_k=0}^{a_k}\binom{a_k}{r_k}(-1)^{r_k}T_{2k}^{r_k}(x)C_{b_k-r_k}^{a_k}(T_{2k}(x)).$$

注意到

$$T_n(x)=\sqrt{(x^2-1)U_n^2(x)+1},$$

于是完成了引理 6.3.1 的证明.

定理 6.3.1 对任意正整数 m, n, p, q, 有恒等式

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} F_{qd_1}^{2m}F_{qd_2}^{2m}\cdots F_{qd_p}^{2m}$$
$$=\frac{(-1)^{mqn}2^p}{5^{mp}}\sum_{a_0+a_1+\cdots+a_m=p}\ \sum_{b_0+b_1+\cdots+b_m=n}\binom{p}{a_0a_1\ldots a_m}$$
$$\times\prod_{k=0}^{m}(-1)^{(m-k)a_k}\binom{2m}{k}^{a_k}\sum_{r_k=0}^{a_k}\binom{a_k}{r_k}(-1)^{r_k}\left(\frac{5}{4}F_{2qk}^2+1\right)^{\frac{r_k}{2}}$$
$$\times C_{b_k-r_k}^{a_k}\left(\sqrt{\frac{5}{4}F_{2qk}^2+1}\right).$$

证明 首先由 $U_n(x)$ 的定义

$$U_{qn}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=\mathrm{i}^{qn-1}F_{qn},$$

于是取 $x=\frac{\mathrm{i}}{2}$, 有

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} U_{qd_1}^{2m}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)U_{qd_2}^{2m}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\cdots U_{qd_p}^{2m}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)$$
$$=(-1)^{m(qn-p)}\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} F_{qd_1}^{2m}F_{qd_2}^{2m}\cdots F_{qd_p}^{2m}.$$

结合上式和引理 6.3.1

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} F_{qd_1}^{2m}F_{qd_2}^{2m}\cdots F_{qd_p}^{2m}$$
$$=\frac{(-1)^{mqn}2^p}{5^{mp}}\sum_{a_0+a_1+\cdots+a_m=p}\ \sum_{b_0+b_1+\cdots+b_m=n}\binom{p}{a_0a_1\cdots a_m}$$

$$\times \prod_{k=0}^{m} (-1)^{(m-k)a_k} \binom{2m}{k}^{a_k} \sum_{r_k=0}^{a_k} \binom{a_k}{r_k} (-1)^{r_k} \sqrt{\frac{5}{4}F_{2qk}^2 + 1}^{\,r_k}$$

$$\times C_{b_k - r_k}^{a_k} \left(\sqrt{\frac{5}{4}F_{2qk}^2 + 1} \right).$$

于是完成了定理 6.3.1 的证明.

在定理中取 $m = 1$ 并且注意到

$$C_n^{\lambda}(x) = \sum_{l=0}^{[n/2]} (-1)^l \binom{k+n-l-1}{n-l} \binom{n-l}{l} (2x)^{n-2l},$$

即得

推论 6.3.1 对任意正整数 n, p, q, 有计算式

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} F_{qd_1}^2 F_{qd_2}^2 \cdots F_{qd_p}^2$$

$$= \frac{(-1)^{qn} 2^p}{5^p} \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{k} \sum_{t=0}^{p-k} \sum_{l=0}^{\left[\frac{j-s}{2}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-j-t}{2}\right]} (-1)^{k+s+t+l+r} 2^{n+p-k-s-t-2l-2r} \binom{k}{s}$$

$$\times \binom{p-k}{t} \binom{k+j-s-l-1}{j-s-l} \binom{j-s-l}{l} \binom{n+p-k-j-t-r-1}{n-j-t-r}$$

$$\times \binom{n-j-t-r}{r} \left(\frac{5}{4} F_{2q}^2 + 1 \right)^{\frac{n-j-t-2r}{2}}.$$

6.4 Fibonacci 数奇次幂的积和式

6.3 节得到了 Fibonacci 数偶次幂的积和式, 本节运用同样的方法可以得到 Fibonacci 数奇次幂积和式的计算式. 即通过对第二类 Chebyshev 多项式的研究得到

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} F_{q(d_1+1)}^{2m+1} F_{q(d_2+1)}^{2m+1} \cdots F_{q(d_p+1)}^{2m+1}$$

的计算式. 事实上, 运用初等方法和 Chebyshev 多项式的性质证明

引理 6.4.1 对任意正整数 n 和 p, 有恒等式

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} U_{d_1}(x) U_{d_2}(x) \cdots U_{d_p}(x) = C_n^p(x).$$

证明 参阅文献 [48].

引理 6.4.2 对任意正整数 m, n 和 p, 有恒等式

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} U_{d_1}^{2m+1}(x)U_{d_2}^{2m+1}(x)\cdots U_{d_p}^{2m+1}(x)$$
$$=\frac{1}{4^{mp}(x^2-1)^{mp}}\sum_{a_0+a_1+\cdots+a_m=p}\ \sum_{b_0+b_1+\cdots+b_m=n}\binom{a_0a_1\cdots a_m}{p}$$
$$\times\prod_{k=0}^{m}(-1)^{(m-k)a_k}\binom{2m+1}{k}^{a_k}U_{2k}^{a_k}(x)C_{bk}^{a_k}(T_{2k+1}(x)).$$

证明 注意到

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},$$
$$(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})=1.$$

由 $U_n(x)$ 的定义有

$$U_n^{2m+1}(x)=\frac{1}{2^{2m}\sqrt{x^2-1}^{2m+1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]^{2m+1}$$
$$=\frac{1}{4^m(x^2-1)^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{2m+1}{k}U_{(n+1)(2k+1)-1}(x),$$

应用引理 6.2.1, 有

$$U_n^{2m+1}(x)=\frac{1}{4^m(x^2-1)^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{2m+1}{k}U_{2k}(x)U_n(T_{2k+1}(x)).$$

设 $f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n^{2m+1}(x)t^n$, 考虑到上式有

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4^m(x^2-1)^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{2m+1}{k}U_{2k}(x)U_n(T_{2k+1}(x))\right]t^n$$
$$=\frac{1}{4^m(x^2-1)^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{2m+1}{k}U_{2k}(x)\sum_{n=0}^{\infty}U_n\left(T_{2k+}(x)\right)t^n$$
$$=\frac{1}{4^m(x^2-1)^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{2m+1}{k}U_{2k}(x)G\left(T_{2k+1}(x),t\right),$$

因此

$$f^p(x,t)=\frac{1}{4^{mp}(x^2-1)^{mp}}\left[\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{2m+1}{k}U_{2k}(x)G(T_{2k+1}(x),t)\right]^p$$
$$=\frac{1}{4^{mp}(x^2-1)^{mp}}\sum_{a_0+a_1+\cdots+a_m=p}\left[\binom{p}{a_0a_1\cdots a_m}\prod_{k=0}^{m}(-1)^{(m-k)a_k}\right.$$

$$\times \binom{2m+1}{k}^{a_k} U_{2k}^{a_k}(x) G^{a_k}(T_{2k+1}(x), t)\Bigg],$$

由 (6-10) 和 (6-3) 有

$$G^{a_k}(T_{2k+1}(x), t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{a_k}(T_{2k+1}(x))\, t^n.$$

于是

$$\prod_{k=0}^{m} G^{a_k}(T_{2k+1}(x), t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{b_0+b_1+\cdots+b_m=n}\prod_{k=0}^{m} C_{b_k}^{a_k}(T_{2k+1}(x))\right] t^n.$$

结合上面两个式子, 进行整理后再与

$$\begin{aligned} f^p(x,t) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} U_n^{2m+1}(x) t^n\right]^p \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} U_{d_1}^{2m+1}(x) U_{d_2}^{2m+1}(x)\cdots U_{d_p}^{2m+1}(x)\right] t^n \end{aligned}$$

比较 t^n 项系数, 即完成了引理 6.4.2 的证明.

定理 6.4.1　对任意正整数 m, n, p, q, 有恒等式

$$\begin{aligned} &\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} F_{q(d_1+1)}^{2m+1} F_{q(d_2+1)}^{2m+1}\cdots F_{q(d_p+1)}^{2m+1} \\ =&\frac{(-1)\left(\dfrac{m+1}{2}+n\right)^{mq}\cdot F_q^{2mp}}{\mathrm{i}^{qn}\cdot[(-1)^q L_q^2-4]^{mp}} \sum_{a_0+a_1+\cdots+a_m=p}\ \sum_{b_0+b_1+\cdots+b_m=n}\binom{p}{a_0 a_1\ldots a_m} \\ &\times \prod_{k=0}^{m}(-1)^{(m-k)a_k}\binom{2m+1}{k}^{a_k} F_{(2k+1)q}^{a} C_{b_k}^{a_k}\left(\frac{\mathrm{i}^{(2k+1)q}}{2} L_{(2k+1)q}\right). \end{aligned}$$

证明　将 $x = T_q\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)$ 代入引理 6.4.2, 应用引理 6.2.2, 并注意到

$$U_{d_j}^{2m+1}\left(T_q\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right) = \mathrm{i}(2m+1)qd_j\frac{F_{q(d_j+1)}^{2m+1}}{F_q^{2m+1}}.$$

此时引理 6.4.2 的左边为

$$\frac{\mathrm{i}^{(2m+1)qn}}{F_q^{(2m+1)p}}\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n} F_{q(d_1+1)}^{2m+1} F_{q(d_2+1)}^{2m+1}\cdots F_{q(d_p+1)}^{2m+1}.$$

再将

$$U_{2k}^{a_k}\left(T_q\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right) = \frac{\mathrm{i}^{2kqa_k} F_{q(2k+1)}^{a_k}}{F_q^{a_k}}$$

和

$$T_{2k+1}\left(T_q\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right)=\frac{\mathrm{i}^{(2k+1)q}}{2}L_{(2k+1)q}$$

代入引理 6.4.2 中恒等式的右边得

$$\frac{1}{[(-1)^qL_q^2-4]^{mp}}\sum_{a_0+a_1+\cdots+a_m=p}\ \sum_{b_0+b_1+\cdots+b_m=n}\binom{p}{a_0a_1\ldots a_m}$$
$$\times\prod_{k=0}^{m}(-1)^{(m-k)a_k+kq}\binom{2m+1}{k}^{a_k}\frac{F^{a}_{(2k+1)q}}{F_q^{a_k}}C_{b_k}^{a_k}\left(\frac{\mathrm{i}^{(2k+1)q}}{2}L_{(2k+1)q}\right).$$

令上两式相等, 进行整理即完成了定理 6.4.1 的证明. 在定理 6.4.1 中取 $m=1$, 并考虑 $C_n^k(x)$ 的表达式

$$C_n^k(x)=\sum_{l=0}^{[n/2]}(-1)^l\binom{k+n-l-1}{n-l}\binom{n-l}{l}(2x)^{n-2l}.$$

经过整理有

推论 6.4.1 对任意正整数 m,n,p,q, 有计算式

$$\sum_{d_1+d_2+\cdots+d_p=n}F^3_{q(d_1+1)}F^3_{q(d_2+1)}\cdots F^3_{q(d_p+1)}$$
$$=\left[\frac{F_{3q}\cdot F_q^2}{(-1)^qL_q^2-4}\right]^p\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{[j/2]}\sum_{r=0}^{[(n-j)/2]}(-1)^{(q+1)(k+r+l)+q(j+p)}\binom{p}{k}\left(\frac{3F_q}{F_{3q}}\right)^k$$
$$\times L_q^{j-2l}L_{3q}^{n-j-2r}\binom{p-k+n-j-r-1}{n-j-r}\binom{n-j-r}{r}$$
$$\times\binom{k+j-l-1}{j-l}\binom{j-l}{l}.$$

这三节的内容只给出了一部分关于 Fibonacci 数和 Lucas 数的恒等式, 以起到抛砖引玉的作用. 其实关于这方面的结论很多, 由于篇幅限定, 建议读者查阅张文鹏教授、刘端森教授等学者的有关文献.

6.5 研究 Bernoulli 数和 Euler 数的一种方法

设 $|z|<2\pi$ 为任意复数, Bernoulli 数 B_n 和 Euler 数 $E_n(n=0,1,2,\cdots)$ 分别由下列生成函数的系数确定 (参阅文献 [31]~[33]):

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{z^n}{n!},\quad |z|<\frac{\pi}{2}\tag{6-11}$$

和

$$\sec z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{6-12}$$

由 (6-11) 可知 $B_0=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42}$, $B_8=-\frac{1}{30}$, $B_{10}=-\frac{5}{66}$, $\cdots$, 而且对于 $n\geqslant 3$ 的奇数有 $B_n=0$, 对于 $n\geqslant 2$ 的偶数有 (参阅文献 [34])

$$B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n+1}{m}B_m,$$

由 (6-12) 可知 $E_0=1$, $E_2=1$, $E_4=5$, $E_6=61$, $E_8=11385$, $E_{10}=150521$, $\cdots$, 并且对于 $n\geqslant 1$ 有

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{2n}{2s}E_{2s}=0.$$

Bernoulli 数和 Euler 数在组合数学和解析数论中有着极广泛的应用, 因此有很多学者已经研究过它们的算术性质. 文献 [35] 中证明了关于 Bernoulli 数的一个很有用的同余式, 即对于素数 $p>3$, 当 $p\equiv 3(\bmod 4)$ 时有

$$2\left(2-\left(\frac{2}{p}\right)\right)B_m\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{j}{p}\right)(\bmod p),$$

这里 $\left(\frac{x}{p}\right)$ 为 Legendre 符号且 $m=\frac{p+1}{2}$. Zhang 在文献 [36] 中得到并证明了有关 Euler 数的有趣的同余式, 即

$$E_{p-1}=\begin{cases}0\ (\bmod p), & p=1(\bmod 4),\\ -2\ (\bmod p), & p=3(\bmod 4),\end{cases}$$

这里 p 是一个素数. Liu 在文献 [37] 中证明了对于任意正整数 n 和 k, 有

$$E_{2n}\equiv(-1)^{n+k}2^{2n+1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^i i^{2n}(\bmod (2k+1)^2).$$

还有一些有关 Bernoulli 数的恒等式, 就是对于任意整数 $n\geqslant 1$ 和 $k\geqslant 0$, 有

(a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j}\frac{2-2^{2j}}{(2k+1)^{2j}}B_{2j}=\frac{(2n+1)2^{2n}}{(2k+1)^{2n+1}}\sum_{i=0}^{k}i^{2n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j}\frac{2-2^{2j}}{(2k+2)^{2j}}B_{2j}=\frac{2n+1}{2^{2n}(k+1)^{2n+1}}\sum_{i=0}^{k}(2i+1)^{2n}$.

很显然这些结论来自于一些三角恒等式, 由文献 [7] 的习题 3.2.7~ 习题 3.2.9 有

(A) $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$;

(B) $\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$;

(C) $\frac{1}{\sin x}+\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2$.

在 (A) 中用 $\pi-y$ 代替 x, (B)(C) 中用 $\frac{\pi}{2}-y$ 代替 x, 就可以得到相应的恒等式:

(A′) $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos ky=\frac{(-1)^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{2\cos\frac{y}{2}}$;

(B′) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sin(2k-1)y=\frac{(-1)^n\sin 2ny}{2\cos y}$;

(C′) $\frac{1}{\cos y}+\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\cos(2k-1)y=\left(\frac{(\sin 2ny)^2}{\cos^2 y}\right)^2$,

$$\frac{1}{\cos y}+\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\cos(2k-1)y=\left(\frac{\cos(2n+1)y}{\cos y}\right)^2.$$

注意到

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

和

$$\frac{1}{\sin x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2-2^{2n})\frac{B_{2n}}{(2n+1)!}x^{2n}.$$

可以由上面式 (A) 到式 (C′) 得到下列恒等式:

(a) $\sum_{s=0}^{n}\binom{2n+1}{2s}\frac{2-2^{2s}}{(2k+1)^{2s}}B_{2s}=\frac{(2n+1)2^{2n}}{(2k+1)^{2n+1}}\sum_{t=1}^{k}t^{2n}$.

(b) $\sum_{s=0}^{n}\binom{2n+1}{2s}\frac{2-2^{2s}}{(2k)^{2s}}B_{2s}=\frac{2(2n+1)}{(2k)^{2n+1}}\sum_{t=1}^{k}(2t-1)^{2n}$.

(c$_1$) $\sum_{t=0}^{n}\binom{2n+2}{2t}(2-2^{2s})\frac{B_{2t}}{(2k)^{2t}}=\frac{(4n+1)}{(2k)^{2n+2}}\sum_{m=1}^{k}(2m-1)^{2n+1}$.

(c$_2$) $E_{2n} - (2k)^{2n}\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n+k-t}\binom{2n}{2t}\frac{E_{2t}}{(2k)^{2t}} = 2\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^{m+n}(2m+1)^{2n}.$

(a′) $\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s+k}\binom{2n}{2s}\frac{B_{2s}}{(2k+1)^{2s}} = \frac{2}{(2k+1)^{2n}}\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t}(2t)^{2n}.$

(b′) $\sum_{s=0}^{n}\binom{2n+1}{2s}\frac{(-1)^{k-s-1}E_{2s}}{(2k)^{2s}} = \frac{2}{(2k)^{2n+1}}\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t}(2t-1)^{2n+1}.$

(c′) $\sum_{s=0}^{n}\binom{2n+2}{2s}(-1)^{s}\frac{E_{2s}}{(4k)^{2s}} = \frac{4(n+1)(2n+1)}{(4k)^{2n+2}}\sum_{t=1}^{2k}(-1)^{t-1}(2t-1)^{2n}.$

(c″) $E_{2n} + \sum_{s=0}^{n}\binom{2n}{2s}(-1)^{n-s}\frac{E_{2s}}{(4k+2)^{2s-2n}} = 2\sum_{t=0}^{2k+1}(-1)^{t-1+n}(2t-1)^{2n}.$

本节内容将给出上面恒等式的应用. 由式 (a) 有下面的定理:

定理 6.5.1 对任意素数 $p \equiv 1 \pmod 4$ 和整数 $\geqslant 1$, 有同余式

$$B_{\frac{\varphi(p^{2\alpha})}{2}} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha}}.$$

为了证明定理 6.5.1, 需要

引理 6.5.1 设 p 是一个奇素数, 则对任意正整数 α 和任意整数 a 满足 $(a,p)=1$, 有

$$a^{\frac{\varphi(p^{\alpha})}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (\mathrm{mod} p^{\alpha}).$$

证明 应用数学归纳法进行证明, 从 Euler 函数 $\varphi(n)$ 和 $\varphi(p)=p-1$ 有

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} (\mathrm{mod}\ p).$$

这就意味着 $\alpha=1$ 时引理成立. 假设 $\alpha=m\geqslant 1$ 时引理成立, 即

$$a^{\frac{\varphi(p^{m})}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (\mathrm{mod}\ p^{m})$$

或

$$a^{\frac{\varphi(p^{m})}{2}} = qp^{m} + \left(\frac{a}{p}\right),$$

之后, 已知 $p|\binom{p}{i}$ $(1\leqslant i\leqslant p-1)$ 有

$$a^{\frac{\varphi(p^{m+1})}{2}} = a^{\frac{p\varphi(p^m)}{2}} = \left(qp^m + \left(\frac{a}{p}\right)\right)^p$$
$$\equiv \left(\frac{a}{p}\right)^p = \left(\frac{a}{p}\right) (\bmod\ p^{m+1}),$$

也就是说, $\alpha = m+1$ 时引理成立. 于是完成了引理 6.5.1 的证明.

现在通过引理 6.5.1 来证明定理 6.5.1. 设 p 是一个素数且满足 $p \equiv 1(\bmod\ 4)$, 则对任意正整数 α, $n = \frac{\varphi(p^{2\alpha})}{4}$ 是一个整数, 在式 (a) 中取 $k = \frac{p^\alpha - 1}{2}$ 和 $n = \frac{\varphi(p^{2\alpha})}{4}$ 有

$$(2k+1)^{2n} \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j} \frac{2-2^{2j}}{(2k+1)^{2j}} B_{2j} = \frac{(2n+1)2^{2n}}{2k+1} \sum_{t=0}^{k} t^{2n}.$$

注意到 $2k+1 = p^\alpha$ 和 $(2n+1, p) = \left(\frac{\varphi(p^{2\alpha})}{2}, p\right) = 1$, 结合上述恒等式得到同余式

$$\left(2 - 2^{\frac{\varphi(p^{2\alpha})}{2}}\right) B_{\frac{\varphi(p^{2\alpha})}{2}} \equiv \frac{2^{\frac{\varphi(p^{2\alpha})}{2}}}{p^\alpha} \sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}} s^{\frac{\varphi(p^{2\alpha})}{2}} (\bmod\ p^\alpha). \tag{6-13}$$

显然如果 $p|s$, 则 $p^{2\alpha}|s^{\frac{\varphi(p^{2\alpha})}{2}}$. 结合引理 6.5.1 并注意到

$$\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}} \left(\frac{s}{p}\right) = \sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-p}{2}} \left(\frac{s}{p}\right) + \sum_{s=\frac{p^\alpha-p}{2}+1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}} \left(\frac{s}{p}\right)$$
$$= \sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{s}{p}\right) = 0,$$

会有

$$\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}} s^{\frac{\varphi(p^{2\alpha})}{2}} \equiv \sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}} \left(\frac{s}{p}\right) \equiv \sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0(\bmod\ p^{2\alpha})$$

或

$$\frac{1}{p^\alpha} \sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}} s^{\frac{\varphi(p^{2\alpha})}{2}} \equiv 0(\bmod\ p^\alpha). \tag{6-14}$$

结合式 (6-13) 和 (6-14) 可得

$$\left(2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right) B_{\frac{\varphi(p^{2\alpha})}{2}} \equiv (\bmod\ p^\alpha)$$

或

$$B_{\frac{\varphi(p^{2\alpha})}{2}} \equiv (\mathrm{mod}\ p^{\alpha}).$$

于是就完成了定理 6.5.1 的证明.

接下来的命题是关于 Euler 数的猜测. 事实上, 可以从 (a′) 得到

定理 6.5.2 对任意素数 $p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ 和整数 $\alpha \geqslant 1$, 有

$$(-1)^{\frac{p-1}{4}} E_{\frac{\varphi(p^{\alpha})}{2}} \equiv -\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\tau(\chi'\chi_4)L(1,\ \chi'\chi_4)(\mathrm{mod}\ p^{\alpha}),$$

其中, χ' 表示模 p 的 Legendre 符号, χ_4 为模 4 的非主特征, $\tau(\chi)$ 为 Gauss 和, $L(s,\chi)$ 为 Dirichlet 特征 χ 的 Dirichlet L 函数.

为了完成定理 6.5.2 的证明, 需要

引理 6.5.2 令 χ 为模 m 的原特征且 $\chi(-1) = -1$, 有

$$\frac{1}{m}\sum_{b=1}^{m} b\chi(b) = \frac{\mathrm{i}}{\pi}\tau(\chi)L(1,\bar{\chi}),$$

其中 $\tau(\chi) = \sum\limits_{a=1}^{m}\tau(a)e\left(\frac{m}{a}\right)$ 为 Gauss 和, $e(y) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y}$, $L(s,\ \chi)$ 为 Dirichlet 特征 χ 的 Dirichlet L 函数.

证明 由文献 [3] 的定理 12.11 和定理 12.20, 易证.

引理 6.5.3 对任意素数 $p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, 有 $\sum\limits_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{s}{p}\right) = 0.$

证明 显然有 $\sum\limits_{s=1}^{p-1}\left(\frac{s}{p}\right) = 0$. 又如果 $p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, 则 $\left(\frac{s}{p}\right) = \left(\frac{p-s}{p}\right)$. 于是

$$\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{s}{p}\right) = \sum_{s=1}^{p-1}\left(\frac{s}{p}\right) - \sum_{s=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\left(\frac{s}{p}\right) = -\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-s}{p}\right) = -\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{s}{p}\right),$$

即 $\sum\limits_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{s}{p}\right) = 0$. 于是完成了引理 6.5.3 的证明.

引理 6.5.4 对任意素数 $p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, 有

$$\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\tau(\chi'\chi_4)L(1,\ \chi'\chi_4),$$

其中 χ_4 为模 4 的 Dirichlet 原特征.

证明 因为 χ_4 为模 4 的 Dirichlet 原特征, 所以有 $\chi_4(1)=\chi_4(-3)=1$, $\chi_4(3)=\chi_4(-1)=-1$, 则显然有恒等式

$$\sum_{s=1}^{4p} s\left(\frac{s}{p}\right)\chi_4(s)=\sum_{s=0}^{p-1}(4s+1)\left(\frac{4s+1}{p}\right)-\sum_{s=0}^{p-1}(4s+3)\left(\frac{4s+3}{p}\right). \tag{6-15}$$

注意到 $\left(\frac{4}{p}\right)=1$ 和 $\sum\limits_{s=0}^{p-1}\left(\frac{s}{p}\right)=0$, 就有

$$\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{p-1}(4s+1)\left(\frac{4s+1}{p}\right)\\ =&4\sum_{s=0}^{p-1}s\left(\frac{s+\bar{4}}{p}\right)=4\sum_{s=0}^{p-1}(s+\bar{4})\left(\frac{s+\bar{4}}{p}\right)\\ =&4\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{4}}(s+\bar{4})\left(\frac{s+\bar{4}}{p}\right)+4\sum_{s=\frac{p-1}{4}+1}^{p-1}(s+\bar{4})\left(\frac{s+\bar{4}}{p}\right).\end{aligned} \tag{6-16}$$

这里 $4\cdot\bar{4}\equiv 1(\bmod p)$. 另外已知 $\dfrac{3p+1}{4}$ 是一个整数且 $\bar{4}=\dfrac{3p+1}{4}$, 于是有, 当 $s\leqslant\dfrac{p-1}{4}$ 时, $0\leqslant s+\bar{4}\leqslant p$; 当 $s>\dfrac{p-1}{4}$ 时, $p<s+\bar{4}\leqslant 2p-1$. 因此

$$\begin{aligned}&4\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{4}}(s+\bar{4})\left(\frac{s+\bar{4}}{p}\right)+4\sum_{s=\frac{p-1}{4}+1}^{p-1}(s+\bar{4})\left(\frac{s+\bar{4}}{p}\right)\\ =&4\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{4}}(s+\bar{4})\left(\frac{s+\bar{4}}{p}\right)+4\sum_{s=\frac{p-1}{4}+1}^{p-1}(s+\bar{4}-p)\left(\frac{s+\bar{4}-p}{p}\right)\\ &+4\sum_{s=\frac{p-1}{4}+1}^{p-1}p\left(\frac{s+\bar{4}}{p}\right)\\ =&4\sum_{a=1}^{p-1}a\left(\frac{a}{p}\right)+4p\sum_{s=\frac{p-1}{4}+1}^{p-1}\left(\frac{s+\bar{4}}{p}\right).\end{aligned} \tag{6-17}$$

注意到 $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$, 有

$$\sum_{a=1}^{p-1}a\left(\frac{a}{p}\right)=0.$$

结合式 (6-16) 和 (6-17)

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{p-1}(4s+1)\left(\frac{4s+1}{p}\right) &= 4p\sum_{s=\frac{p-1}{4}+1}^{p-1}\left(\frac{s+\bar{4}}{p}\right)\\
&=-4p\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{s+\dfrac{3p+1}{4}}{p}\right) = -4p\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{s-\dfrac{p-1}{4}}{p}\right)\\
&=-4p\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{\dfrac{p-1}{4}-s}{p}\right) = -4p\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right).
\end{aligned}
\tag{6-18}
$$

运用同样的方法, 还可得到

$$
\sum_{s=0}^{p-1}(4s+3)\left(\frac{4s+3}{p}\right) = 4p\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right).
\tag{6-19}
$$

从式 (6-15), (6-18) 和 (6-19) 可得

$$
\sum_{s=1}^{4p}s\left(\frac{s}{p}\right)\chi_4(s) = -8p\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right).
\tag{6-20}
$$

因为 $\chi'(s)=\left(\dfrac{s}{p}\right)$ 是模 p 的原特征,$\chi'(4)$ 是模 4 的原特征, 于是 $\chi'\chi_4$ 也是模 $4p$ 的原特征. 注意

$$
\chi'\chi_4(-1)=\chi'(-1)\chi_4(-1)=-1,
$$

结合式 (6-20) 和引理 6.5.2, 有

$$
\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\tau(\chi'\chi_4)L(1,\chi'\chi_4),
$$

于是完成了引理 6.5.4 的证明.

现在通过引理 6.5.2~ 引理 6.5.4 证明定理 6.5.2. 由 (a′),

$$
(-1)^nE_{2n}+\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{2n}{2j}(2k+1)^{2n-2j}E_{2j} = 2\sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}(2s)^{2n}.
$$

所以有

$$
(-1)^nE_{2n}\equiv 2\sum_{s=1}^{k}(-1)^{k-s}(2s)^{2n}(\bmod\ 2k+1).
$$

取 $n=\frac{\varphi(p^\alpha)}{4}$, $k=\frac{p^\alpha-1}{2}$, 而 $p\equiv 1(\bmod 4)$, 从而

$$(-1)^{\frac{\varphi(p^\alpha)}{4}}E_{\frac{\varphi(p^\alpha)}{2}}\equiv 2\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}}(-1)^s(2s)^{\frac{\varphi(p^\alpha)}{2}}(\bmod p^\alpha).$$

考虑 Euler 函数, 可知

$$\left(\frac{2s}{p}\right)\equiv(2s)^{\frac{p-1}{2}}(\bmod p)$$

或

$$(2s)^{\frac{p-1}{2}}=ap+\left(\frac{2s}{p}\right).$$

从而

$$(2s)^{\frac{\varphi(p^\alpha)}{2}}=\left[ap+\left(\frac{2s}{p}\right)\right]^{p^{\alpha-1}}\equiv\left(\frac{2s}{p}\right)^{p^{\alpha-1}}\equiv\left(\frac{2s}{p}\right)(\bmod p^\alpha).$$

而 $\left(\frac{4}{p}\right)=1$, 所以

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{\varphi(p^\alpha)}{4}}E_{\frac{\varphi(p^\alpha)}{2}}&\equiv 2\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}}(-1)^s\left(\frac{2s}{p}\right)\\&\equiv 2\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{4}}\left(\frac{4s}{p}\right)-2\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{4}}\left(\frac{2(2s-1)}{p}\right)\\&\equiv 4\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right)-2\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}}\left(\frac{2s}{p}\right)\\&\equiv 4\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right)-2\left(\frac{s}{p}\right)\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}}\left(\frac{s}{p}\right)(\bmod p^\alpha).\end{aligned}\tag{6-21}$$

根据引理 6.5.3, 有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}}\left(\frac{s}{p}\right)&=\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-p}{2}}\left(\frac{s}{p}\right)+\sum_{s=\frac{p^\alpha-p}{2}+1}^{\frac{p^\alpha-1}{2}}\left(\frac{s}{p}\right)\\&=\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{s+(p^\alpha-p)/2}{p}\right)=\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{s}{p}\right)=0\end{aligned}\tag{6-22}$$

和

$$\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right)=\sum_{s=1}^{\frac{p^\alpha-p}{4}}\left(\frac{s}{p}\right)+\sum_{s=\frac{p^\alpha-p}{4}+1}^{\frac{p^\alpha-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{s+(p^{\alpha}-p)/2}{p}\right)=\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right). \tag{6-23}$$

结合式 (6-21), (6-22) 和 (6-23) 容易得到

$$(-1)^{\frac{\varphi(p^{\alpha})}{4}}E_{\frac{\phi(p^{\alpha})}{2}}\equiv 4\sum_{s=1}^{\frac{p^{\alpha}-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right)(\bmod\ p^{\alpha}). \tag{6-24}$$

然后再由式 (6-24) 和引理 6.4.4, 有

$$(-1)^{\frac{\varphi(p^{\alpha})}{4}}E_{\frac{\varphi(p^{\alpha})}{2}}\equiv 4\sum_{s=1}^{\frac{p^{\alpha}-1}{4}}\left(\frac{s}{p}\right)\equiv-\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\tau(\chi'\chi_4)L(1,\ \chi'\chi_4)(\bmod\ p^{\alpha}).$$

于是完成了定理 6.5.2 的证明.

参考文献

[1] Smarandache F. Only Problems, not Solutions. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Walfisz A. Weylsche Exponential Summen in der Neueren Zahlentheorie. Berlin: Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.

[3] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1976.

[4] Montgomery H L. Primes in arithmetic progressions. Michigan Mathematical Journal, 1970, 17: 33–39.

[5] He X L. On the 80-th problem of F.Smarandache(II). Smarandache Notions journal, 2004, 14: 74–79.

[6] Babaev G, Gagurov N, Ismoliov D. Some asymptotic formulas connected with divisors of polynomials. Trudy Mat. Inst. Steklov., 1984, 163: 10–18.

[7] Murty M R. Problems in Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 2001.

[8] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础. 北京: 科学出版社, 1997.

[9] Bredihin B M. Binary additive problems of indeterminate type I(Russian). Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat, 1963, 27: 439–462.

[10] Earls J. The Smarandache sums of composites between factors function. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 265–270.

[11] Sandor J. On the generalization of the Smarandache function. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 1999, 5: 41–51.

[12] Smarandache k-factorial at http://www.gallup.unm.edu/smarandache/SKF.htm, 2001.

[13] Heath-Brown D R. The differences between consecutive primes. III Journal of the London Mathematical Society, 1979, 20: 177–178.

[14] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质. 数学学报 (中文版), 2006, 49: 1009–1012.

[15] Lv C. A number theoretic function and its mean value. Research on Smarandache Problems in Number Theory, Hexis, 2004, 33–36.

[16] Sandor J. On certain inequalities involving the Smarandache function. Scientia Magna, 2006, 3: 78–80.

[17] Wang T. A formula for Smarandache LCM ratio sequence. Research on Smarandache problems in Number Theory, Hexis, 2005, 45-46.

[18] Bencze M. Open question for the Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 201–203.

[19] Smrandache F. A function in number theory. Analele Universitatii din Timisoara, Seria Matematica, 1980, 18: 79–88.

[20] Farris M, Mitchell P. Bounding the Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 2003, 13: 37–42.

[21] Aschbacher C. Problems. Smarandache Notions Journal, 1998, 9: 141–151.

[22] Hardy G H, Wright E M. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford: Oxford University Press, 1938.

[23] Zhang W P. On an equation of Smarandache and its integer solutions. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 176–178.

[24] 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想. 北京: 科学出版社, 1981.

[25] Le M H. Two formulas for Smarandache LCM ratio sequences. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 183–185.

[26] Ibstedt H. Surfing on the Ocean Of Number–A few Smarandache Notions and Similar Topics. New Mexico:Erhus University Press, 1997.

[27] Ibstedt H. Computational Aspects of Number Sequence. Lupton:American Research Press, 1999.

[28] Zhang W P. Some identities involving the Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 1997, 35: 225–229.

[29] Zhang W P. On Chebyshev polynomials and Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 2002, 40: 424–428.

[30] Peter B, Tamás E. Polynomials and Polynomial Inequalitities. New York: Springer-Verlag, 1995.

[31] Dilcher K. Sums of products of Bernoulli numbers. Journal of Number Theory, 1996, 60(1): 23–41.

[32] Jordan C. Calculus of Finite Differences. New York: Chelsea, 1965.

[33] Nörlund N E. Differenzenrechnung. Berlin: Springer-Verlag, 1924.

[34] Glenn J F. Congruences relating rational values of Bernoulli and Euler polynomials. The Fibonacci Quarterly, 2001, 39(1): 50–57.

[35] Ireland K, Rosen M A. Classical Introduction to Modern Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1990.

[36] Zhang W P. Some identities involving the Euler and the central factorial numbers. The Fibonacci Quarterly, 1998, 36(2): 154–157.

[37] Liu G D. On congruences of Euler numbers modulo an odd square. The Fibonacci Quarterly, 2005, 43(2): 132–136.

[38] Li H L, Zhao X P. On the Smarandache function and the k-th roots of a positive integer. Research on Smarandache Problems in Number Theory, Hexis, 2004, 119-122.

[39] Wang Y X. On the Smarandache function. Research on Smarandache Problems in Number Theory (vol.II), Hexis, 2005, 103–106.

[40] Yang C D, Liu D S. On the mean value of a new arithmetic function. Research on Smarandache Problems in Number Theory(Vol.II), Hexis, 2005, 75–77.

[41] Lu Y M. On the solutions of an equation involving the Smarandache function . Scientia Magna, 2006, 2(1): 76–79.

[42] Le M H. A conjecture concerning the Smarandache dual function. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 153–155.

[43] Ding L P. On the mean value of Smarandache ceil function. Scientia Magna, 2005, 2(2): 74–77.

[44] Lu Y M. On a dual function of the Smarandache ceil function. Research on Smarandache problems in number theory, Hexis, 2005, 55–57.

[45] Xu Z F. On the additive k-power complements. Research on Smarandache Problems in Number Theory, Hexis, 2004, 13–16.

[46] Zhao F Z, Wang T M, Generalizations of some identities involving the Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 2001, 39(2): 165–167.

[47] 刘端森, 李超. 盖根堡多项式及斐波那契数和鲁卡数的一些恒等式. 延安大学学报, 2003, 22(1): 7–9.

[48] 刘端森, 李超, 杨存典. Fibonacci 数奇次幂的乘积和. 纺织高校基础科学学报, 2004, 17(3): 187–189.

[49] 徐哲峰, 王晓瑛. 一些包含 Chebyshev 多项式和 Fibonacci 数的恒等式. 咸阳师范学院学报, 2003, 18(2): 11–13.

[50] Liu G D, Luo H. Some identities involving Bernoulli numbers. The Fibonacci Quarterly, 2005, 43(3): 208–212.

[51] Le M H. On the pseudo-Smarandache squarefree function. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 229–236.

[52] Le M H. A conjecture concerning the Smarandache dual function. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 153–155.

[53] Ma J P. The Smaranache multiplicative function. Scientia Magna, 2005, 1(1): 125–128.

[54] Ma J P. An equation involving the Smarandache function. Scientia Magna, 2005, 1(2): 89–90.

[55] 马金萍, 刘宝利. 一个关于 Smarandache 函数的方程. 数学学报, 2007, 50(5): 1185–1189.

[56] Ma J P, Ge J. A new compound function and its mean value. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2010, 25(2): 312–316.

[57] 马金萍. 一个包含 F.Smarandache 函数的混合均值. 郑州大学学报 (理学版), 2007, 39(1): 31–32.

[58] 马金萍, 葛键. 一个新的复合函数及其均值. 宁夏大学学报, 2007, 3: 210–212.

[59] 马金萍. 一些关于 Brewer 多项式的恒等式. 黑龙江大学学报, 2009, 26(2): 168–172.

[60] Ma J P. Some indentity involving Fibnacci numbers in even power. Basic Science Journal of Textile Universities, 2007, 20(1): 60–63.

[61] 刘宝利, 马金萍. 一个包含平方补数的方程. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(4): 784–787.

[62] Ma J P. On the mean value of the K-th power part residues function. Research on Smarandache problems in number theory, Hexis, 2005, 37–40.

[63] Liu Y N, Ma J P. Some identities involving the K-th power complements. Scientia Magna, 2006, 2(2): 101–104.

[64] 华罗庚. 数论导引. 北京: 科学出版社, 1979.

[65] 闵嗣鹤. 数论的方法. 北京: 科学出版社, 1981.

[66] 冯克勤. 代数数论. 北京: 科学出版社, 2000.

[General Information]

□□=□□□□□□□□□□□□

□□=□□□□

□□=162

SS□=12909816

DX□=

□□□□=2012.01

□□□=□□□□□